

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шурыгин В.В.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ II.

Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть II.
Аналитическая геометрия пространства.

Казань – 2012

УДК 514.1

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

*методической комиссии
института математики и механики
Протокол № 5 от 22 декабря 2011 г.*

*заседания кафедры геометрии
Протокол № 5 от 22 ноября 2011 г.*

Научный редактор:
доктор физ.-мат. наук, доц. Е.Н. Сосов

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ Ю.Г. Игнатьев,
доктор физ.-мат. наук, проф. ЧГПУ А.В. Столяров

Шурыгин Вадим Васильевич.

Аналитическая геометрия II. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Часть II. Аналитическая геометрия пространства. Учебное пособие / В.В. Шурыгин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2012. – 120 с.

Учебное пособие предназначено для студентов I курса института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

©Казанский федеральный
университет, 2012
©Шурыгин В.В., 2012

1 Преобразование координат в аффинном пространстве.

1.1 Переход к новому базису в векторном пространстве.

Предположим, что в векторном пространстве \mathbf{V}_n даны два базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$, и $\{\mathbf{e}_{i'}\}$, $i', j', \dots = 1', 2', \dots, n'$. Первый базис будем называть также *старым*, а второй *новым*. Всякий вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$ может быть разложен по каждому из данных базисов:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \quad (1)$$

Чтобы установить соотношения между старыми $\{a^i\}$ и новыми $\{a^{i'}\}$ координатами вектора \mathbf{a} , разложим векторы каждого из рассматриваемых базисов по другому базису:

$$\mathbf{e}_{i'} = p_{i'}^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = p_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \quad (2)$$

Замечание. Напомним, что мы используем правило суммирования Эйнштейна, согласно которому по одинаковым индексам, один из которых стоит наверху, а другой внизу, осуществляется суммирование по всей области их изменения, например:

$$p_{i'}^i \mathbf{e}_i = p_{i'}^1 \mathbf{e}_1 + p_{i'}^2 \mathbf{e}_2 + \dots + p_{i'}^n \mathbf{e}_n.$$

Подставим выражения (2) для векторов $\mathbf{e}_{i'}$ в (1): $a^i \mathbf{e}_i = a^{i'} p_{i'}^i \mathbf{e}_i$. Сравнивая коэффициенты при векторах старого базиса, получаем

$$a^i = p_{i'}^i a^{i'} = p_{1'}^i a^{1'} + p_{2'}^i a^{2'} + \dots + p_{n'}^i a^{n'}. \quad (3)$$

Базисы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ совершенно равноправны, поэтому формула, выражающая новые координаты вектора \mathbf{a} через старые, имеет вид

$$a^{i'} = p_i^{i'} a^i. \quad (4)$$

Матрица

$$P = (p_{i'}^i) = \begin{pmatrix} p_{1'}^1 & p_{2'}^1 & \dots & p_{n'}^1 \\ p_{1'}^2 & p_{2'}^2 & \dots & p_{n'}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1'}^n & p_{2'}^n & \dots & p_{n'}^n \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов нового базиса относительно старого базиса, называется *матрицей преобразования базиса*. Матрица $P' = (p_i^{j'})$ называется *матрицей обратного преобразования базиса*. Подстановка второго из разложений (2) в первое (при этом мы должны поменять «немой» индекс суммирования i' на j' !) дает $\mathbf{e}_{i'} = p_i^{j'} p_i^{j'} \mathbf{e}_{j'}$. Из однозначности разложения вектора $\mathbf{e}_{i'}$ по базису $\{\mathbf{e}_{j'}\}$ следует, что

$$p_i^{j'} p_i^{i'} = \delta_{i'}^{j'} = \begin{cases} 1 & \text{при } i' = j', \\ 0 & \text{при } i' \neq j' \end{cases} \quad (\text{символ Кронекера})$$

или, в матричном виде, $P'P = E$, где E — единичная матрица. Таким образом, матрица обратного преобразования базиса является обратной по отношению к матрице прямого преобразования базиса: $P' = P^{-1}$.

В матричном виде преобразования координат вектора (3) и (4) выглядят, соответственно, следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1'}^1 & p_{2'}^1 & \dots & p_{n'}^1 \\ p_{1'}^2 & p_{2'}^2 & \dots & p_{n'}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1'}^n & p_{2'}^n & \dots & p_{n'}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ \vdots \\ a^{n'} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ \vdots \\ a^{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{1'} & p_2^{1'} & \dots & p_n^{1'} \\ p_1^{2'} & p_2^{2'} & \dots & p_n^{2'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{n'} & p_2^{n'} & \dots & p_n^{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь в пространстве \mathbf{V}_n задан третий базис $\{\mathbf{e}_{i''}\}$, $i'', j'', \dots = 1'', 2'', \dots, n''$, и $\mathbf{e}_{i''} = p_{i''}^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i''} = p_{i''}^{i'} \mathbf{e}_{i'}$, тогда, очевидно,

$$p_{i''}^i = p_{i''}^{i'} p_{i'}^i,$$

то есть, если $P_{(1 \rightarrow 2)} = (p_{i'}^i)$ — матрица перехода от первого базиса ко второму, $P_{(2 \rightarrow 3)} = (p_{i''}^{i'})$ — матрица перехода от второго базиса к третьему, а $P_{(1 \rightarrow 3)} = (p_{i''}^i)$ — матрица перехода от первого базиса к третьему, то

$$P_{(1 \rightarrow 3)} = P_{(1 \rightarrow 2)} P_{(2 \rightarrow 3)}. \quad (5)$$

1.2 Преобразование аффинного репера.

Предположим теперь, что в аффинном пространстве \mathcal{A}_n даны два репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ и $\{O'; \mathbf{e}_{i'}\}$, и базисы \mathbf{e}_i и $\mathbf{e}_{i'}$ ассоциированного векторного пространства \mathbf{V}_n связаны между собой соотношениями (2). Пусть $\{b^i\}$ — координаты начала O' нового репера относительно старого репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$, то есть $\overrightarrow{OO'} = b^i \mathbf{e}_i$. Радиус-векторы $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'M}$ произвольной точки $M \in \mathcal{A}_n$ в рассматриваемых реперах связаны между собой соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \overrightarrow{OO'}$.

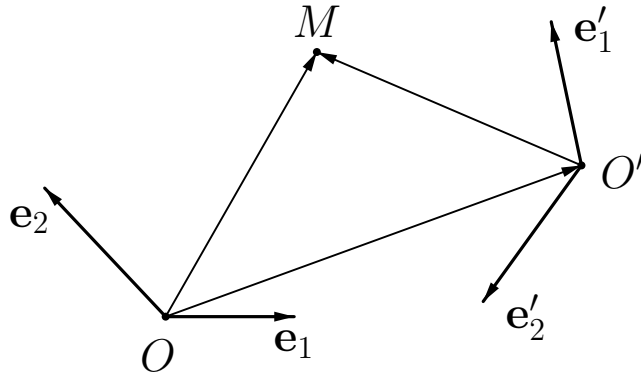


Рис. 1.

В координатах это соотношение принимает вид $x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}_{i'} + b^i \mathbf{e}_i$, откуда получаем выражения старых коор-

динат точки M через новые

$$x^i = p_{i'}^i x^{i'} + b^i. \quad (6)$$

В матричном виде уравнения (6) выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1'}^1 & p_{2'}^1 & \dots & p_{n'}^1 \\ p_{1'}^2 & p_{2'}^2 & \dots & p_{n'}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1'}^n & p_{2'}^n & \dots & p_{n'}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Аналогичный вид имеют и выражения новых координат через старые. При конкретных вычислениях они получаются из уравнений (7) умножением на обратную матрицу P^{-1} .

Рассмотрим некоторые примеры.

1.3 Примеры.

Задача 1. Найти уравнение гиперболы в системе координат, координатными осями которой являются асимптоты.

Решение. См. рисунок 2. Гипербола в канонической системе координат имеет уравнение

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Рассмотрим новый (аффинный!) репер $\{O'; \mathbf{e}_{i'}\}$, определяемый соотношениями: $O' = O$, $\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{2}(a\mathbf{e}_1 - b\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{e}_{2'} = \frac{1}{2}(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2)$. Имеем:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные выражения $x^1 = \frac{1}{2}(ax^{1'} + ax^{2'})$, $x^2 = \frac{1}{2}(-bx^{1'} + bx^{2'})$ в уравнение (8), получаем **уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам:**

$$x^{1'} x^{2'} = 1.$$

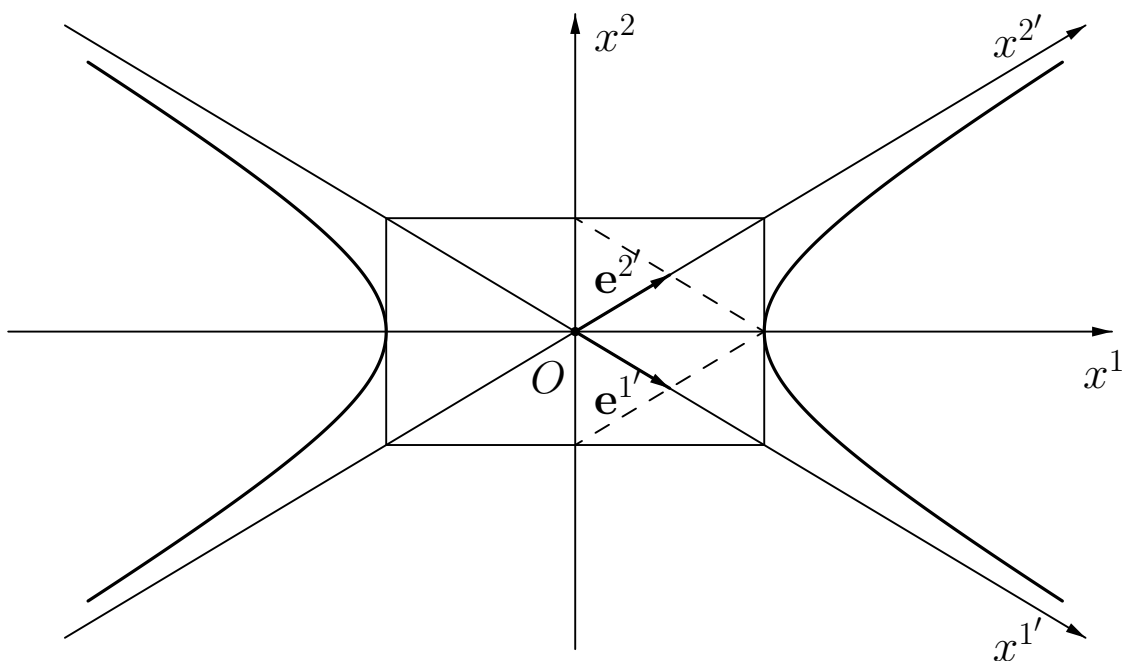


Рис. 2.

Задача 2. Начало и векторы базиса нового репера на плоскости заданы своими координатами относительно первоначального репера: $O'(1; -1)$, $\mathbf{e}_{1'} = \{2; 3\}$, $\mathbf{e}_{2'} = \{1; 2\}$.

а) Какое уравнение в новой системе координат будет иметь прямая $\ell : 2x^1 - 3x^2 + 5 = 0$?

б) Какое уравнение относительно первоначальной системы координат имеет координатная ось $O'x^{2'}$?

с) Какие координаты имеют точки $O(0; 0)$ и $A(-2; 1)$ в новой системе координат?

Решение. а) Преобразование координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Подставляя $x^1 = 2x^{1'} + x^{2'} + 1$, $x^2 = 3x^{1'} + 2x^{2'} - 1$ в уравнение прямой ℓ , находим ее уравнение в новой системе координат: $5x^{1'} - 4x^{2'} + 5 = 0$.

б) Умножая матричное равенство (9) слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ обратную к } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

находим обратное преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя $x^{1'} = 2x^1 - x^2 - 3$, $x^{2'} = -3x^1 + 2x^2 + 5$ в уравнение $x^{1'} = 0$ оси $O'x^{2'}$, находим уравнение этой прямой в старой системе координат: $2x^1 - x^2 - 3 = 0$.

с) Подставляя координаты точек $O(0; 0)$ и $A(-2; 1)$ вместо $(x^1; x^2)$ в уравнения (10), находим их новые координаты: $x_O^{1'} = -3$, $x_O^{2'} = 5$, $x_A^{1'} = -8$, $x_A^{2'} = 13$.

Рекомендуемая литература: [8], Лекция 11; [1], Гл. III, §1.

Задачи и упражнения: [2], 117, 118, 119, 122, 1291, 1292; [11], 1277, 1278, 1279, 1280, 1281; [13], 136, 137, 139, 140.

1.4 Ориентация векторных и аффинных пространств.

Рассмотрим некоторое векторное пространство \mathbf{V}_n и обозначим символом \mathcal{B} множество всех базисов в \mathbf{V}_n . Введем на множестве \mathcal{B} отношение, полагая $\{\mathbf{e}_{i'}\} \sim \{\mathbf{e}_i\}$, если матрица преобразования базиса $(p_{i'}^i)$ имеет положительный определитель: $\det(p_{i'}^i) > 0$. Легко проверяется, что введенное отношение удовлетворяет всем аксиомам отношения эквивалентности: рефлексивность следует из того, что определитель единичной матрицы равен $1 > 0$, симметричность следует из того, что $\det(p_i^{i'}) = 1/\det(p_{i'}^i) > 0$, а транзитивность вытекает из свойств определителя произведения матриц (см.[6], гл. 3, §13) и формулы (5).

Эквивалентные базисы называются *одинаково ориентированными*.

Утверждение. Введенное отношение эквивалентности разбивает множество всех базисов на два класса, каждый из которых состоит из одинаково ориентированных базисов.

Доказательство. Выберем произвольный базис $\{\mathbf{e}_i\}$ и рассмотрим два подмножества в \mathcal{B} :

$$\mathcal{B}_1 = \{\{\mathbf{e}_{i'}\} \mid \det(p_i^{i'}) > 0\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\{\mathbf{e}_{i'}\} \mid \det(p_i^{i'}) < 0\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ и \mathcal{B}_1 — это класс эквивалентности. Остается проверить, что \mathcal{B}_2 — класс эквивалентности. Но это следует из формулы (5): если $\det(p_i^{i'}) < 0$ и $\det(p_i^{i''}) < 0$, то $\det(p_i^{i''}) > 0$.

Определения. Каждый из двух классов эквивалентности базисов \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 называется ориентацией векторного пространства \mathbf{V}_n .

Векторное пространство \mathbf{V}_n называется ориентированным, если в нем выбрана ориентация.

Базисы, принадлежащие выбранной ориентации, называются положительно ориентированными или правыми, а базисы, принадлежащие второму классу эквивалентности, — отрицательно ориентированными или левыми.

Аффинное пространство \mathcal{A}_n называется ориентированным, если ориентировано ассоциированное с ним векторное пространство \mathbf{V}_n . При этом репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$ называется положительно (соответственно, отрицательно) ориентированным, если положительно (соответственно, отрицательно) ориентированным является базис $\{\mathbf{e}_i\}$.

1.5 Примеры.

Задача 3. Два базиса $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ и $\{\mathbf{e}_{i''}\}$ в трехмерном пространстве заданы своими координатами в некотором третьем базисе:

$\mathbf{e}_{1'} = \{3; 2; 3\}$, $\mathbf{e}_{2'} = \{2; 5; 4\}$, $\mathbf{e}_{3'} = \{1; 3; 2\}$; $\mathbf{e}_{1''} = \{5; 0; 7\}$, $\mathbf{e}_{2''} = \{6; 1; 4\}$, $\mathbf{e}_{3''} = \{3; 0; 5\}$. Одинаково ли ориентированы эти два базиса?

Решение. Поскольку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \text{а} \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4,$$

то базисы $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ и $\{\mathbf{e}_{i''}\}$ противоположно ориентированы.

Задача 4. Покажите, что реперы $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3\}$ в пространстве \mathcal{A}_3 одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда концы векторов \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}'_3 , отложенных от точки O , лежат по одну сторону от координатной плоскости Ox^1x^2 (плоскости, проходящей через точку O параллельно векторам \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2).

Решение. Пусть $\mathbf{e}'_3 = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + \nu \mathbf{e}_3$ — разложение вектора \mathbf{e}'_3 по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, тогда матрица P перехода от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\det P > 0$ тогда и только тогда, когда $\nu > 0$.

Рекомендуемая литература: [8], Лекция 11; [1], Гл. III, §3; [4], Гл. 2, §3.

1.6 Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

Билинейное отображение вида

$$h : \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$$

называют *билинейной формой*. В базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ векторного пространства \mathbf{V}_n билинейная форма h задается следующим образом:

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j) = a^i b^j h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = h_{ij} a^i b^j,$$

где $h_{ij} = h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Матрица

$$H = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей билинейной формы h в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$.

Выясним, как изменяется эта матрица при преобразовании базиса $\mathbf{e}_{i'} = p_{i'}^i \mathbf{e}_i$ в векторном пространстве \mathbf{V}_n . Имеем:

$$h_{i'j'} = h(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = h(p_{i'}^i \mathbf{e}_i, p_{j'}^j \mathbf{e}_j) = p_{i'}^i p_{j'}^j h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = p_{i'}^i p_{j'}^j h_{ij}. \quad (11)$$

Используя операцию умножения матриц, формулу (11) можно записать в виде

$$H' = P^\top H P, \quad (12)$$

где $H' = (h_{i'j'})$.

1.7 Преобразование прямоугольных систем координат.

Рассмотрим теперь случай евклидова аффинного пространства \mathcal{E}_n . Пусть (\mathbf{E}_n, g) — ассоциированное с \mathcal{E}_n евклидово векторное пространство, где

$$g : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R}$$

— билинейная форма на \mathbf{E}_n , относящая паре векторов их скалярное произведение. Форму g называют *основной* или *метрической* формой евклидова пространства \mathbf{E}_n .

Определение. Базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в евклидовом векторном пространстве \mathbf{E}_n называется ортонормированным, если $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (\text{символ Кронекера}).$$

Репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$ в евклидовом аффинном пространстве \mathcal{E}_n называется ортонормированным, если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства \mathbf{E}_n является ортонормированным.

Таким образом, в ортонормированном базисе матрица $G = (g_{ij})$ основной формы является единичной матрицей: $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Рассмотрим теперь преобразование ортонормированного базиса в \mathbf{E}_n , то есть переход $\mathbf{e}_{i'} = p_{i'}^i \mathbf{e}_i$ от одного ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к другому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{i'}\}$. Поскольку в этом случае матрицы $G = (g_{ij})$ и $G' = (g_{i'j'})$ формы g обе являются единичными, то формула (12) принимает вид

$$P^\top P = E \iff P^{-1} = P^\top. \quad (13)$$

Определение. Матрица P , удовлетворяющая соотношению (13), называется ортогональной матрицей.

Ортогональные матрицы образуют группу относительно операции умножения матриц, обозначаемую $O(n)$ и называемую *ортогональной группой*.

При переходе от одного ортонормированного репера в пространстве \mathcal{E}_n к другому координаты точек и векторов преобразуются по формулам (6) и (3), где $P = (p_{i'}^i)$ — ортогональная матрица.

Из соотношения (13) следует, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1 . При непрерывном изменении ортогональной матрицы ее определитель не может изменить знак, по-

этому множество ортогональных матриц состоит из двух компонент $O^+(n)$ и $O^-(n)$, в первую из которых входят матрицы с определителем 1, а во вторую матрицы с определителем -1 . Множество $O^+(n)$ ортогональных матриц с определителем, равным 1, является подгруппой в $O(n)$. Эта подгруппа обозначается $SO(n)$ и называется *специальной ортогональной группой*. Между компонентами $SO(n)$ и $O^-(n)$ можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Для этого достаточно у каждой матрицы из $SO(n)$ поменять знак у всех элементов первого столбца. Очевидно, множество правых (а также и множество левых) ортонормированных базисов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $SO(n)$.

При переходе от одного правого ортонормированного репера $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ на плоскости к другому правому ортонормированному реперу $\{O'; \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ имеют место следующие формулы:

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \\ \mathbf{j}' = \mathbf{e}(\varphi + \pi/2) = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $(a; b)$ — координаты точки O' в старом репере.

Если ориентация у реперов противоположная, то преобразование координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Из (14) следует, что имеется взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между $SO(2)$ и окружностью \mathbf{S}^1 —

множеством точек на евклидовой плоскости \mathbf{R}^2 , удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Это соответствие устанавливается следующим образом:

$$SO(2) \ni \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbf{S}^1.$$

Каждое преобразование правого ортонормированного репера $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в трехмерном евклидовом пространстве \mathbf{E}_3 можно представить в виде композиции трех последовательных поворотов вокруг некоторых осей.

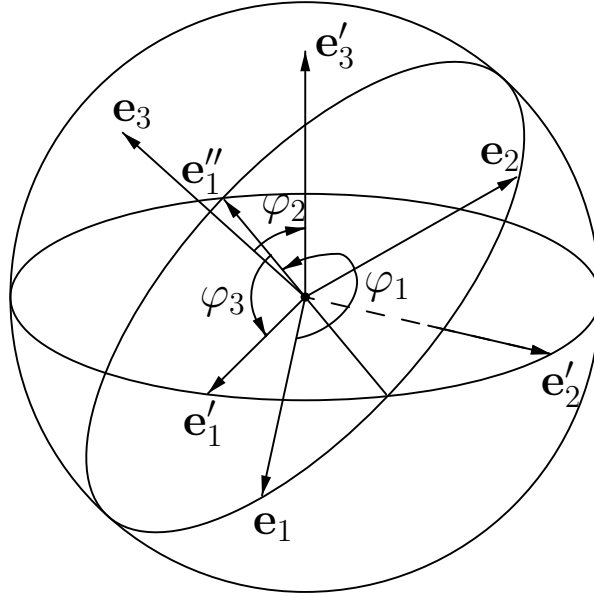


Рис. 3.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ — два правых ортонормированных репера в \mathbf{E}_3 (для векторов нового базиса в данном случае удобно использовать наряду с ранее принятыми обозначениями $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ также и обозначения $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$). Будем представлять векторы этих реперов отложенными от одной точки O евклидова аффинного пространства \mathcal{E}_3 . Рассмотрим две плоскости α и α' , проходящие через точку O параллельно векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ соответственно. Считаем, что плоскости α и α' ориентированы таким образом, что реперы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ явля-

ются правыми. При этом направление кратчайшего вращения от первого вектора репера ко второму является (полагается по определению) положительным.

Пусть вектор \mathbf{e}_1'' лежит на прямой пересечения плоскостей α и α' и образует с векторами \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}_3' правый базис $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3'\}$. Кратчайший угол вращения в положительном направлении от вектора \mathbf{e}_1 до вектора \mathbf{e}_1'' в плоскости α обозначим φ_1 . Если репер $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ произволен, то φ_1 — произвольный угол из интервала $[0, 2\pi)$. Пусть $\varphi_2 \in [0, \pi]$ — угол поворота от вектора \mathbf{e}_3 до вектора \mathbf{e}_3' в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{e}_1'' , а φ_3 — кратчайший угол вращения в положительном направлении от вектора \mathbf{e}_1'' до вектора \mathbf{e}_1' в плоскости α' (см. рисунок 3). Переход от репера $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к реперу $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ можно представить как композицию следующих трех последовательных вращений.

Первое вращение: репер $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ поворачивается вокруг оси, проходящей через O в направлении \mathbf{e}_3 , на угол φ_1 . При этом репер $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ переходит в репер $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3\}$ (см. рисунок 4).

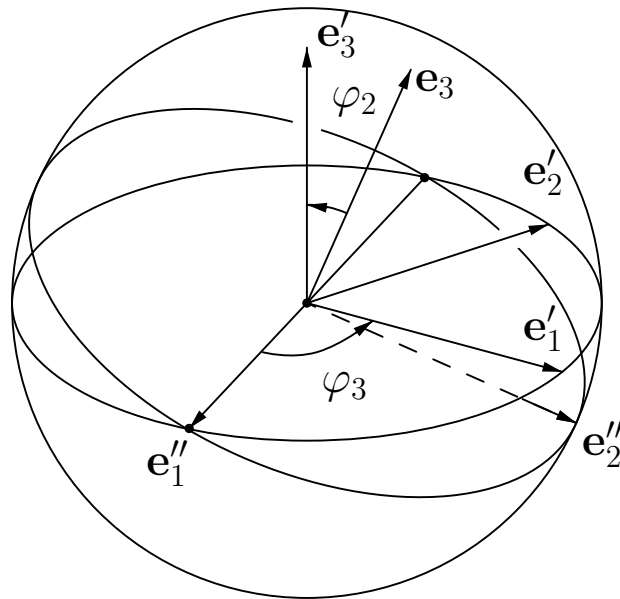


Рис. 4.

Второе вращение: репер $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3\}$ поворачивается вокруг оси, проходящей через O в направлении \mathbf{e}_1'' , на угол φ_2 . При этом репер $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3\}$ переходит в репер $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2''', \mathbf{e}_3'\}$ (см. рисунок 5).

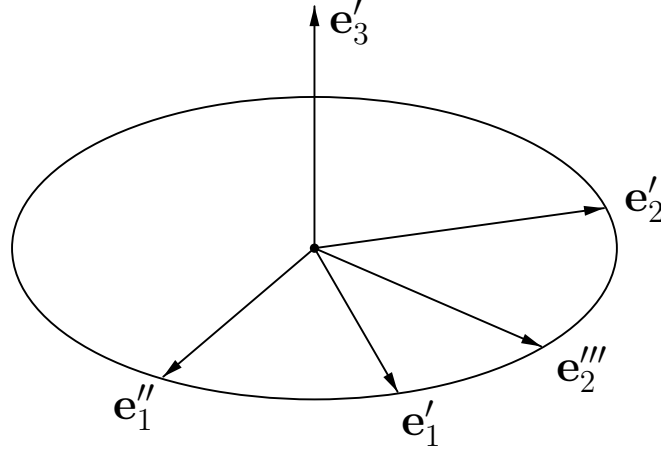


Рис. 5.

Третье вращение: репер $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2''', \mathbf{e}_3'\}$ поворачивается вокруг оси, проходящей через O в направлении \mathbf{e}_3' , на угол φ_3 . При этом репер $\{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2''', \mathbf{e}_3'\}$ переходит в репер $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$.

Углы φ_1 , φ_2 и φ_3 называются углами Эйлера ([1], Гл. III, §5; [4], Гл. 3, §2).

Матрицы P_1 , P_2 и P_3 рассмотренных выше преобразований базисов имеют, соответственно, следующий вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произвольная матрица $P \in SO(3)$ является произведением $P = P_1 P_2 P_3$ матриц P_1 , P_2 и P_3 для некоторых $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$, $\varphi_2 \in [0, \pi]$ и $\varphi_3 \in [0, 2\pi)$. Столбцы этой матрицы, представляющие собой наборы координат векторов $\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_i'$, $i' = 1', 2', 3'$, в базисе

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} p_{1'}^1 \\ p_{1'}^2 \\ p_{1'}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} p_{2'}^1 \\ p_{2'}^2 \\ p_{2'}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} p_{3'}^1 \\ p_{3'}^2 \\ p_{3'}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что преобразование координат, связывающее между собой координаты точек в двух различных правых прямоугольных системах координат в трехмерном евклидовом пространстве \mathcal{E}_3 , может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= x'(\cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3) + \\ &+ y'(-\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3) + z'(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + a, \\ y &= x'(\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3) + \\ &+ y'(-\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3) + z'(-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2) + b, \\ z &= x'(\sin \varphi_2 \cos \varphi_3) + y'(\sin \varphi_2 \sin \varphi_3) + z'(\cos \varphi_2) + c. \end{aligned}$$

Имеется следующая геометрическая интерпретация группы $SO(3)$. Если некоторый правый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в пространстве \mathbf{E}_3 зафиксирован, то тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между $SO(3)$ и множеством всех правых ортонормированных базисов в \mathbf{E}_3 . Произвольный правый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ однозначно определяется парой векторов $\{\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_1\}$. Если вектор \mathbf{e}'_3

отложить от фиксированной точки O в евклидовом аффинном пространстве \mathcal{E}_3 как вектор \overrightarrow{OA} , то, в силу произвольности вектора \mathbf{e}'_3 , точка A опишет сферу \mathbf{S}^2 единичного радиуса в \mathcal{E}_3 с центром в точке O . Поскольку вектор \mathbf{e}'_1 ортогонален вектору \mathbf{e}'_3 , то если отложить вектор \mathbf{e}'_1 от точки A как вектор \overrightarrow{AB} , то конец вектора \mathbf{e}'_1 , точка B , опишет окружность единичного радиуса в касательной плоскости к сфере в точке A (см. рисунок 6). Таким образом, $SO(3)$ находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с множеством, представляющим собой дизъюнктное объединение окружностей единичного радиуса, расположенных в касательных плоскостях к сфере единичного радиуса и имеющих своим центром точку касания плоскости и сферы. Это множество $T_1\mathbf{S}^2$ называется единичным касательным расслоением к сфере \mathbf{S}^2 .

Указанную интерпретацию можно получить из представления элементов группы $SO(3)$ с помощью углов Эйлера. Рассмотрим правый ортонормированный базис $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ в \mathbf{E}_3 , состоящий из векторов, имеющих в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ соответственно следующие координаты:

$$\begin{aligned} &\{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2, -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \cos \varphi_2\}, \\ &\{\cos \varphi_1, \sin \varphi_1, 0\}, \\ &\{-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_2\}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (15) – (17) эквивалентны следующим разложениям

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{u}_2 \cos \varphi_3 + \mathbf{u}_3 \sin \varphi_3, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{u}_2 \sin \varphi_3 + \mathbf{u}_3 \cos \varphi_3, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{u}_1.$$

Вектор $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}'_3$ задает точку A на сфере \mathbf{S}^2 , а векторы $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ образуют базис в касательной плоскости $T_A\mathbf{S}^2$ к сфере \mathbf{S}^2 в точке A . При изменении параметра φ_3 в пределах $[0, 2\pi)$ конец вектора \mathbf{e}'_1 описывает окружность в плоскости $T_A\mathbf{S}^2$ (см. рисунок 6).

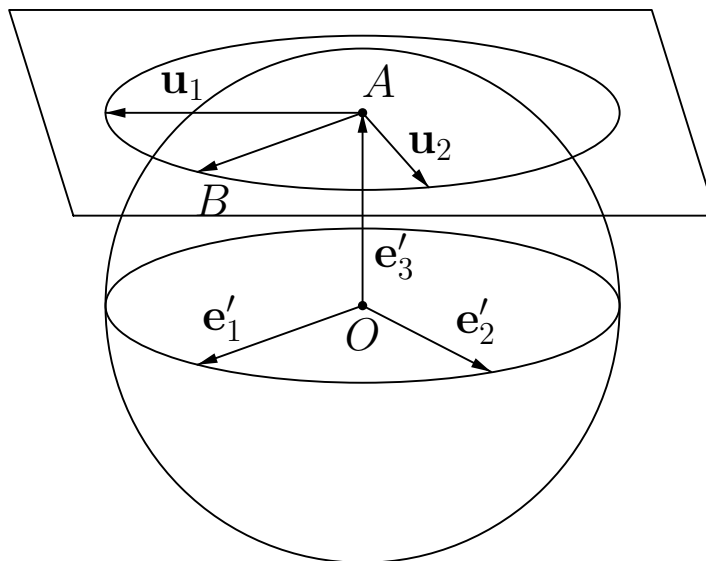


Рис. 6.

1.8 Примеры.

Задача 5. На какой угол нужно повернуть оси прямоугольной системы координат на плоскости, чтобы уравнение $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 4 = 0$ после преобразования координат не содержало члена с произведением координат?

Решение. Подставляя формулы преобразования координат

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

в уравнение $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 4 = 0$, получаем $2(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 - 5(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + 2(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + 3(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) - 4 = 0$. Приводя подобные члены, находим коэффициент при произведении $x'y'$. Он имеет вид $5 \sin^2 \varphi - 5 \cos^2 \varphi$. Приравнявая его нулю, находим $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 6. Начало O прямоугольной системы координат в пространстве находится в вершине куба, а векторы базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ совпадают, соответственно, с векторами ребер куба $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$. Куб поворачивается на угол φ вокруг диагонали, проходящей через точку O . При этом векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$

переходят, соответственно, в векторы $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$ и $\overrightarrow{OB_3}$. Составить формулы преобразования координат при переходе от репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ к реперу $\{O; \mathbf{e}_{i'}\}$, где $\mathbf{e}_{i'} = \overrightarrow{OB_{i'}}$, при 1) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 2) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 3) $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

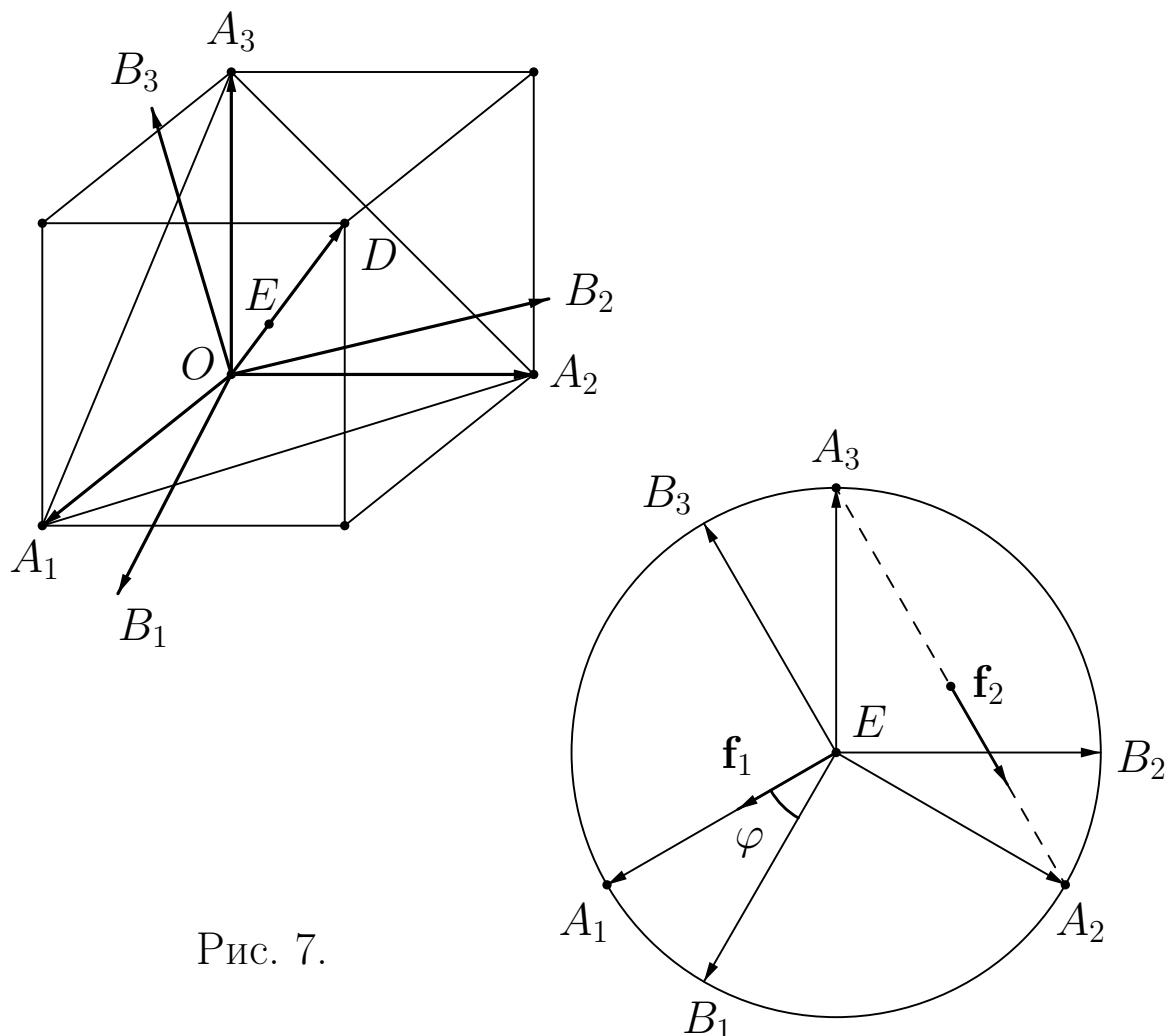


Рис. 7.

Решение. См. рисунок 7. Диагональ OD куба имеет направляющий вектор $\mathbf{a} = \{1; 1; 1\}$, который ортогонален векторам $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-1; 1; 0\}$ и $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-1; 0; 1\}$. Поэтому диагональ OD ортогональна плоскости $A_1A_2A_3$. Как следует из решения задачи 3 из [14], OD пересекает плоскость $A_1A_2A_3$ в точке E , являющейся центром правильного треугольника $A_1A_2A_3$ и имеющей координаты $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Векторы $\overrightarrow{EB_1}$, $\overrightarrow{EB_2}$ и $\overrightarrow{EB_3}$ получаются, соответственно, из векторов $\overrightarrow{EA_1}$, $\overrightarrow{EA_2}$ и $\overrightarrow{EA_3}$ поворотом на угол φ

в плоскости $A_1A_2A_3$. Их можно найти, пользуясь операцией поворота векторов плоскости (см. [14], §5). Для этого нужно сначала выбрать в плоскости $A_1A_2A_3$ некоторый ортонормированный базис, например,

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\overrightarrow{EA_1}}{|\overrightarrow{EA_1}|}; \quad \mathbf{f}_2 = \frac{\overrightarrow{A_3A_2}}{|\overrightarrow{A_3A_2}|}.$$

Теперь легко находятся векторы $\overrightarrow{EB_1} = |\overrightarrow{EA_1}|(\mathbf{f}_1 \cos \varphi + \mathbf{f}_2 \sin \varphi)$, $\overrightarrow{EB_2} = |\overrightarrow{EA_1}|(\mathbf{f}_1 \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \mathbf{f}_2 \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}))$, $\overrightarrow{EB_3} = |\overrightarrow{EA_1}|(\mathbf{f}_1 \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) + \mathbf{f}_2 \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}))$, затем и векторы $\mathbf{e}_{i'} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB_i}$ нового базиса.

Рассмотрим подробно случай $\varphi = \frac{\pi}{3}$. В этом случае $\overrightarrow{EB_1} = -\overrightarrow{EA_3}$, $\overrightarrow{EB_2} = -\overrightarrow{EA_1}$, $\overrightarrow{EB_3} = -\overrightarrow{EA_2}$, отсюда находим простые отношения (см. [14], §3.2) $(A_3EB_1) = (A_1EB_2) = (A_2EB_3) = -2$, а затем координаты точек B_1 , B_2 и B_3 . После вычислений получаем $\mathbf{e}_{1'} = \overrightarrow{OB_1} = \{\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\}$, $\mathbf{e}_{2'} = \overrightarrow{OB_2} = \{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$, $\mathbf{e}_{3'} = \overrightarrow{OB_3} = \{\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$, поэтому формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Составить формулы преобразования координат при переходе от ортонормированного репера $\{O; \mathbf{e}_i\}$ к ортонормированному реперу $\{O'; \mathbf{e}_{i'}\}$, если известно, что $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $\mathbf{e}_{i'} = \overrightarrow{O'A_i}$, $i = 1, 2, 3$, а $O \neq O'$.

Решение. См. рисунок 8. Рассмотрим, как и в предыдущей задаче, точку E , являющуюся центром правильного треугольника $A_1A_2A_3$. Эта точка имеет координаты $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Ясно, что точка O' лежит на прямой OE и $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OE}$, поэтому точка O' имеет координаты $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. Следовательно, $\mathbf{e}_{1'} = \overrightarrow{O'A_1} = \{\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\}$,

$\mathbf{e}_{2'} = \overrightarrow{O'A_2} = \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\}$, $\mathbf{e}_{3'} = \overrightarrow{O'A_3} = \{-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\}$, а преобразование координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

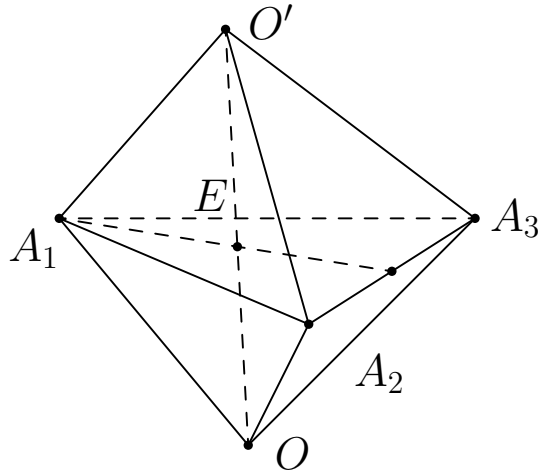


Рис. 8.

Рекомендуемая литература: [8], Лекция 14; [4], Гл. 3, §§1,2; [1], Гл. III, §§2,4.

Задачи и упражнения: [2], 130, 131, 132, 133, 135, 136, 137, 1297, 1298, 1303, 1304, 1305; [13], 141, 736, 738.

2 Векторное и смешанное произведения векторов.

2.1 Векторное произведение.

Определение. Векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ориентированного евклидова пространства \mathbf{E}_3 называется вектор \mathbf{c} , однозначно определяемый следующими условиями:

1*. $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

2*. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \varphi$, где φ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , заключенный в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

$$3^*. \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b}.$$

4*. Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны, то $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — правый базис.

Обозначается векторное произведение векторов следующим образом:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

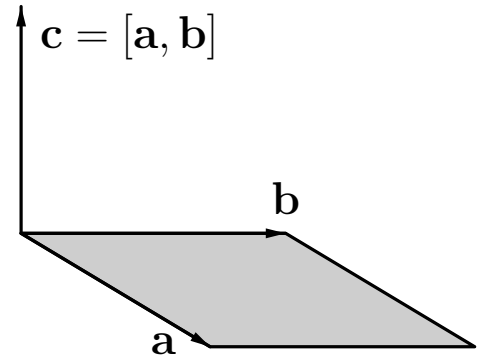


Рис. 9.

Геометрические свойства векторного произведения.

Следующие свойства векторного произведения векторов вытекают непосредственно из определения:

$$1) \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0.$$

2) Модуль $||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]||$ векторного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

3) Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны, то $\mathbf{c} \perp \mathcal{L}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, где $\mathcal{L}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ — линейная оболочка векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (векторная плоскость, натянутая на векторы \mathbf{a} и \mathbf{b}), см. определение в §4.4).

Алгебраические свойства векторного произведения.

$$1^\circ. [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \quad (\text{кососимметричность}).$$

$$2^\circ. [\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}] = \lambda [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \mu [\mathbf{a}, \mathbf{c}].$$

$$3^\circ. [\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}, \mathbf{a}] = \lambda [\mathbf{b}, \mathbf{a}] + \mu [\mathbf{c}, \mathbf{a}].$$

Доказательство.

1°. Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$. Предположим теперь, что \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны, и $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$. Из свойств 2* и 3* следует, что $\mathbf{d} = \pm \mathbf{c}$. Из условия 4* следует, что $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — правый базис. Матрицы перехода от $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ к $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ и $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, -\mathbf{c}\}$ имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определитель первой матрицы отрицателен, а второй — положителен, поэтому правым является базис $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, -\mathbf{c}\}$, что и доказывает свойство 1°.

Свойство 3° вытекает из свойств 1° и 2°. Докажем 2°. Это свойство означает, что отображение

$$\Psi_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}, \cdot] : \mathbf{E}_3 \ni \mathbf{b} \mapsto [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathbf{E}_3$$

линейно при любом $\mathbf{a} \in \mathbf{E}_3$. При $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ свойство 2° выполняется очевидным образом. Далее предполагаем, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Проведем доказательство в несколько шагов.

1) Докажем сначала, что при $\lambda \neq 0$ выполняется

$$[\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lambda [\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \quad (18)$$

Соотношение (18) очевидно выполняется и при $\lambda = 0$, но нас интересует случай $\lambda \neq 0$. При $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ соотношение (18) выполняется очевидным образом. Пусть векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c}$, $[\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{d}$. Из 2* и 3* следует, что $\mathbf{d} \parallel \mathbf{c}$ и $|\mathbf{d}| = |\lambda| |\mathbf{c}|$, поэтому $\mathbf{d} = \pm \lambda \mathbf{c}$. Остается проверить, что базисы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ и $\{\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c}\}$ одинаково ориентированы. Но это следует из того, что

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 > 0.$$

Пусть $\mathbf{e}_{\mathbf{a}}$ — единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор \mathbf{a} , то есть, $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_{\mathbf{a}}$, тогда из (18) следует, что

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = |\mathbf{a}| [\mathbf{e}_{\mathbf{a}}, \mathbf{b}].$$

2) Пусть $\mathbf{V}_2 = \mathcal{L}\{\mathbf{a}\}^\perp$ — подпространство, ортогональное вектору \mathbf{a} , и $\text{pr}_{\mathbf{V}_2} : \mathbf{E}_3 \rightarrow \mathbf{V}_2$ — ортогональная проекция векторов на \mathbf{V}_2 (определение линейной оболочки $\mathcal{L}\{\mathbf{a}\}$ см. в §4.4.) Как

было показано в § 4.1 учебного пособия [14], pr_{V_2} — линейное отображение.

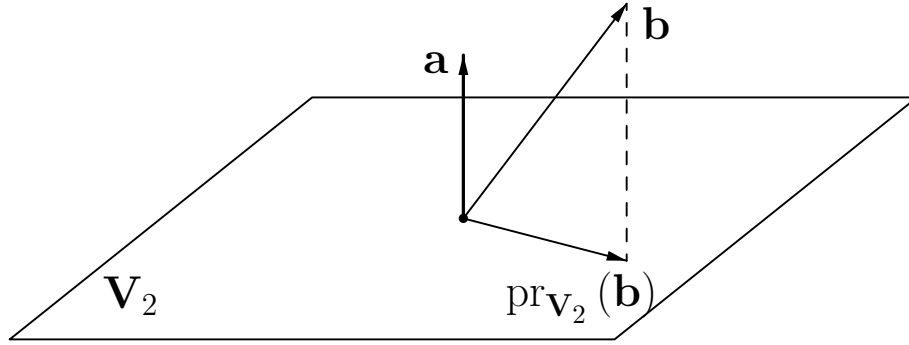


Рис. 10.

Покажем, что имеет место следующая формула:

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}] = [\mathbf{e}_a, \text{pr}_{V_2}(\mathbf{b})].$$

Эта формула, очевидно, выполняется при $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, поэтому предполагаем далее, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны.

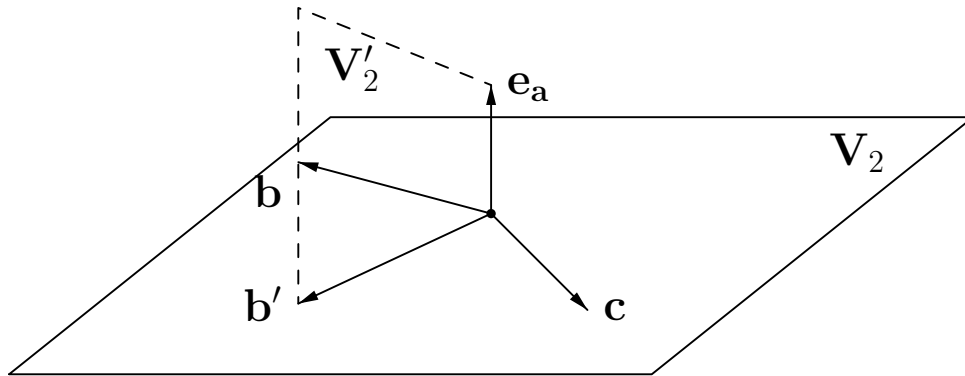


Рис. 11.

Обозначим $\mathbf{b}' = \text{pr}_{V_2}(\mathbf{b})$. Так как $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{e}_a + \mathbf{b}'$, то векторы \mathbf{e}_a , \mathbf{b} и \mathbf{b}' лежат в одном двумерном подпространстве V'_2 (см. рисунок 11). Поскольку $|\mathbf{b}'|$ — высота параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{b} и \mathbf{e}_a , то $||[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}]|| = |\mathbf{b}'| = ||[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}']||$. Оба произведения $[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}']$ ортогональны подпространству V'_2 , поэтому они могут отличаться только знаком. Обозначим $[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}'] = \mathbf{c}$. Остается проверить, что базисы $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{b}', \mathbf{c}\}$ и $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ одинаково ориентированы. Но это следует из положительности определителя

матрицы перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Нам потребуется операция поворота векторов на прямой угол на плоскости $\mathbf{V}_2 = \mathcal{L}\{\mathbf{a}\}^\perp$. Для определения такой операции необходимо сначала ввести на \mathbf{V}_2 ориентацию. Базис $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ на плоскости \mathbf{V}_2 назовем правым, если правым является базис $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ в пространстве \mathbf{E}_3 .

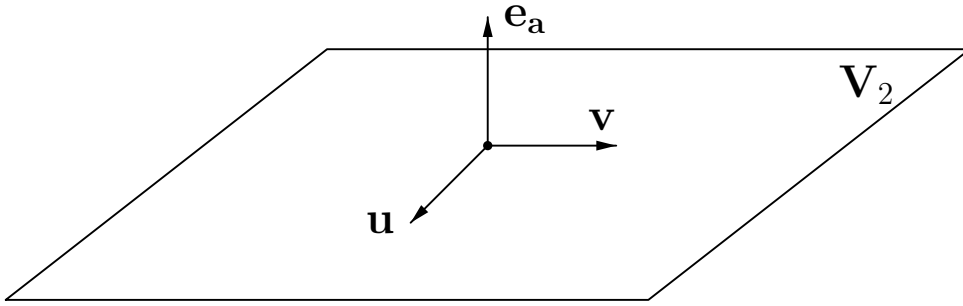


Рис. 12.

Матрицы перехода от базиса $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ к базису $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ в \mathbf{E}_3 и от базиса $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ к базису $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ в \mathbf{V}_2 имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{2'}^2 & p_{3'}^2 \\ 0 & p_{2'}^3 & p_{3'}^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} p_{2'}^2 & p_{3'}^2 \\ p_{2'}^3 & p_{3'}^3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определители этих матриц совпадают (и, в частности, положительны одновременно), то ориентация на плоскости \mathbf{V}_2 введена корректно.

Наличие ориентации на плоскости \mathbf{V}_2 позволяет ввести положительное направление отсчета углов — направление кратчайшего поворота от \mathbf{u} к \mathbf{v} в правом базисе $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Пусть $\Phi_{\frac{\pi}{2}} : \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_2$ — операция поворота на прямой угол на \mathbf{V}_2 , тогда, в соот-

ветствии с согласованными ориентациями, $[\mathbf{e}_a, \mathbf{u}] = \Phi_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{u})$ и, в частности,

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{b}'] = \Phi_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{b}').$$

Теперь мы можем доказать линейность отображения

$$\Psi_a : \mathbf{E}_3 \ni \mathbf{b} \mapsto [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathbf{E}_3.$$

Это отображение линейно, поскольку является композицией

$$\Psi_a = \alpha \circ \Phi_{\frac{\pi}{2}} \circ \text{pr}_{\mathbf{V}_2} : \mathbf{E}_3 \rightarrow \mathbf{V}_2$$

трех линейных отображений, где

$$\alpha : \mathbf{V}_2 \ni \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{a}|\mathbf{v} \in \mathbf{V}_2$$

— умножение векторов на число $|\mathbf{a}|$. \square

Из алгебраических свойств векторного произведения следует, что

$$\varepsilon : \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mapsto [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathbf{E}_3$$

— кососимметричное билинейное отображение. Поэтому, зная векторные произведения базисных векторов, можно легко получить формулу для вычисления векторного произведения произвольных векторов. Имеем:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j] = a^i b^j [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = a^i b^j \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k,$$

где

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k.$$

Таким образом, если $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c}$, то

$$c^k = \varepsilon_{ij}^k a^i b^j. \quad (19)$$

Чтобы записать формулу (19) для конкретного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, нужно вычислить (с учетом кривой симметрии $\varepsilon_{ji}^k = -\varepsilon_{ij}^k$) девять коэффициентов $\varepsilon_{12}^k, \varepsilon_{13}^k, \varepsilon_{23}^k, k = 1, 2, 3$.

Формула для вычисления векторного произведения в прямоугольной системе координат.

Пусть теперь $\{\mathbf{e}_i\}$ — правый ортонормированный базис. В этом случае $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2$ (чтобы убедиться, что базисы $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ и $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ правые, необходимо составить соответствующие матрицы перехода к этим базисам от правого базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$). Следовательно, $\varepsilon_{12}^3 = \varepsilon_{23}^1 = \varepsilon_{31}^2 = 1$, $\varepsilon_{21}^3 = \varepsilon_{32}^1 = \varepsilon_{13}^2 = -1$, а остальные $\varepsilon_{ij}^k = 0$. Поэтому

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3. \quad (20)$$

Формулу (20) удобно записывать в виде символического определителя

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Формула для вычисления площади треугольника в пространстве.

Аналогично случаю плоского треугольника, имеем:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} |[\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A]|.$$

2.2 Смешанное произведение.

Определение. *Смешанным произведением трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} ориентированного евклидова пространства \mathbf{E}_3 называется следующее число:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

Геометрические свойства смешанного произведения.

- 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \iff$ векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} компланарны;
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0 \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — правый базис;
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0 \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — левый базис.

2) Если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} не компланарны, то $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ — объем параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, построенного на этих векторах, как на ребрах, выходящих из одной вершины.

Первое свойство является непосредственным следствием приведенной ниже формулы (22) для вычисления смешанного произведения. Докажем свойство 2).

Пусть V — объем параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, S — площадь параллелограмма $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} как сторонах, рассматриваемого как основание параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, а h — высота параллелепипеда, опущенная на указанное основание. Имеем (см. рисунок 13):

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| |\text{pr}_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}(\mathbf{c})| = Sh = V.$$

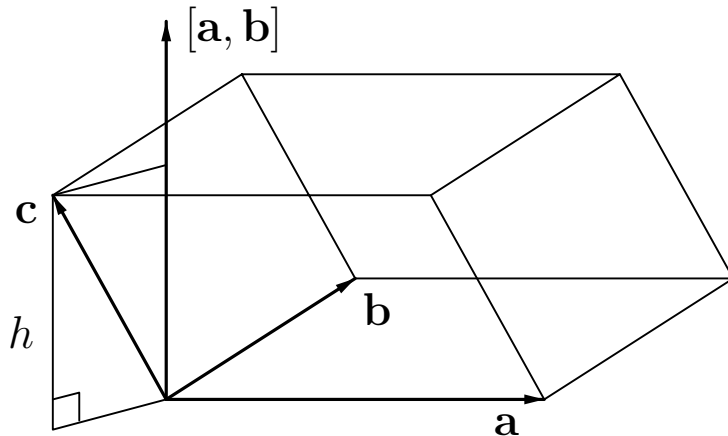


Рис. 13.

Формула для вычисления смешанного произведения в прямоугольной системе координат.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — правый ортонормированный базис. Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Формула (22) с очевидностью следует из формулы (20) и формулы для вычисления скалярного произведения в прямоугольной системе координат.

Алгебраические свойства смешанного произведения.

$$1^\circ. (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = \\ = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (\text{кососимметричность}).$$

$$2^\circ. (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

3°. Отображение

$$\varepsilon : \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbf{R}$$

— кососимметричное трилинейное (то есть линейное по каждому из трех аргументов) отображение.

Доказательство. Свойства 1° и 3° являются непосредственными следствиями формулы (22) и свойств определителей, 2° следует из 1° . Линейность смешанного произведения следует также из линейности скалярного и векторного произведений. \square

Формула для вычисления смешанного произведения в аффинной системе координат.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — произвольный базис в \mathbf{E}_3 . Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j, c^k \mathbf{e}_k) = a^i b^j c^k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k,$$

где

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Из 1° следует, что $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321}$, а остальные коэффициенты $\varepsilon_{ijk} = 0$. Отсюда получаем следующую формулу:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{123} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Соотношения, связывающие ε_{ijk} и ε_{ij}^k .

Коэффициенты ε_{ijk} следующим образом выражаются через коэффициенты ε_{ij}^k и компоненты g_{ij} матрицы скалярного про-

изведения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = ([\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j], \mathbf{e}_k) = \\ &= (\varepsilon_{ij}^m \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ij}^m (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ij}^m g_{mk}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку матрица (g_{ij}) невырожденная, существует обратная к ней матрица. Обозначим компоненты этой матрицы следующим образом: g^{ki} , где, как обычно, первый индекс является номером строки, а второй номером столбца. Матрица (g^{ki}) является симметрической ($g^{ki} = g^{ik}$) и связана с матрицей (g_{ij}) соотношением

$$g^{ki} g_{ij} = \delta_j^k, \quad (25)$$

означающим, что произведение матриц (g^{ki}) и (g_{ij}) является единичной матрицей (о значении матрицы (g^{ki}) см. с. 73). Умножая обе части равенства (24) на g^{kp} , затем суммируя по $k = 1, 2, 3$ и используя соотношение (25), получаем

$$\varepsilon_{ijk} g^{kp} = \varepsilon_{ij}^m g_{mk} g^{kp} = \varepsilon_{ij}^m g^{pk} g_{km} = \varepsilon_{ij}^m \delta_m^p = \varepsilon_{ij}^p.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ijk} g^{kp}. \quad (26)$$

Формула (26) показывает, что сложность формулы для вычисления векторного произведения в произвольном базисе объясняется сложностью формулы для вычисления скалярного произведения.

Альтернативный подход к определению векторного и смешанного произведений векторов.

Векторное и смешанное произведения векторов следующим образом могут быть определены в рамках аксиоматики ориентированного евклидова векторного пространства \mathbf{E}_3 .

Из предшествующих рассуждений следует, что всякое кососимметричное трилинейное отображение

$$\varepsilon : \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3 \ni \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \mapsto \varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbf{R} \quad (27)$$

определяется в данном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ одним коэффициентом ε_{123} и вычисляется по формуле

$$\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{123} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Предполагая, что выбранный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ является правым и ортонормированным, определим смешанное произведение векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ формулой (28), в которой $\varepsilon_{123} = 1$. Пусть теперь $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ — другой правый ортонормированный базис и $(p_{i'}^i) \in SO(3)$ — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ к базису $\{\mathbf{e}_{i'}\}$. Тогда коэффициент $\varepsilon_{1'2'3'}$ для нового базиса равен $\varepsilon_{1'2'3'} = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = \det(p_{i'}^i) = 1$. Отсюда следует, что введенное определение смешанного произведения не зависит от выбора правого ортонормированного базиса.

Теперь векторное произведение векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно определить как вектор \mathbf{x} , удовлетворяющий соотношению

$$(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (29)$$

для любого вектора \mathbf{c} . Соотношение (29) будет выполняться для любого вектора \mathbf{c} , если оно выполняется для векторов базиса:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{x}, c^i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, c^i \mathbf{e}_i).$$

Но $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ — это проекция $\text{pr}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{x}$ вектора \mathbf{x} на ось, определяемую вектором \mathbf{e}_i , то есть координата вектора \mathbf{x} в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$. Отсюда следует, что

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3. \quad (30)$$

Таким образом, соотношением (29) векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определяется корректно. Нетрудно заметить, что формула (30) для вычисления векторного произведения, определенного формулой (29), совпадает с формулой (20). Если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ выбран

таким образом, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} лежат в плоскости Ox^1x^2 , то есть плоскости, содержащей векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , то из формулы (20) следует, что их векторное произведение имеет вид

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

Отсюда следует, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \text{mod} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi,$$

где φ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Для определения векторного произведения можно также использовать формулу (26).

Объем параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} как на ребрах, в рамках рассматриваемого подхода определяется как модуль смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Замечание. Из формулы (28) следует, что два трилинейных кососимметричных отображения (27) отличаются одно от другого числовым множителем. Это указывает на то, что смешанное произведение можно ввести в векторном пространстве \mathbf{V}_3 независимо от какого-либо скалярного произведения как некоторое трилинейное кососимметричное отображение (27). При этом пара $(\mathbf{V}_3, \varepsilon)$ представляет собой так называемое *эквиаффинное* пространство, а отображение ε называется *формой объема* этого эквиаффинного пространства. Эквиаффинным называется и всякое аффинное пространство \mathcal{A}_3 , ассоциированное с эквиаффинным векторным пространством. В эквиаффинном пространстве имеется естественная ориентация: базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ является (по определению) правым, если $\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$. Абсолютная величина $|\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ значения формы объема на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} называется объемом параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, построенного

на этих векторах как на ребрах. В эквивариантном пространстве можно измерять объемы тел, но не определены такие понятия как длина вектора, угол между векторами или площадь параллелограмма. В ориентированном евклидовом пространстве (\mathbf{E}_3, g) выбирается форма объема ε , согласованная со скалярным произведением g и ориентацией, а именно, такая, что $\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ для всякого правого ортонормированного базиса $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. При этом объем куба, построенного на векторах, образующих ортонормированный базис, равен единице.

Аналогичным образом форма объема вводится в векторном пространстве \mathbf{V}_n произвольной размерности n (см. третью часть настоящего учебного пособия [15]).

2.3 Векторные тождества и их применение.

В настоящем разделе рассматриваются некоторые тождественно выполняющиеся векторные равенства, составленные с использованием скалярного, векторного и смешанного произведений, и применения этих равенств в геометрии пространства.

1. Двойное векторное произведение (тождество Грассмана).

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (31)$$

Доказательство. Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то тождество выполняется очевидным образом. Если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то выбираем в пространстве правый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, по отношению к которому $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + c^2 \mathbf{e}_2 + c^3 \mathbf{e}_3$, и вычисляем векторы, находящиеся в левой и правой частях тождества с помощью формулы (20). Пусть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{u}$. Имеем:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & 0 & 0 \\ b^1 & b^2 & 0 \end{vmatrix} = a^1 b^2 \mathbf{e}_3.$$

Поэтому

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = [\mathbf{u}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & a^1 b^2 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -a^1 b^2 c^2 \mathbf{e}_1 + a^1 b^2 c^1 \mathbf{e}_2.$$

Легко проверяется, что правая часть тождества имеет в точности такой же вид. Действительно, $(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = a^1 c^1$, $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = b^1 c^1 + b^2 c^2$, откуда $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = a^1 c^1 (b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2) - (b^1 c^1 + b^2 c^2) a^1 \mathbf{e}_1 = -a^1 b^2 c^2 \mathbf{e}_1 + a^1 b^2 c^1 \mathbf{e}_2$. \square

2. Тождество Якоби.

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] + [[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}] + [[\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{b}] = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Из тождества (32) и кососимметричности $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, векторного произведения следует, что векторное пространство \mathbf{E}_3 с операцией векторного произведения $[\cdot, \cdot]$ образует *алгебру Ли* (см., например, [10]). Для доказательства тождества Якоби достаточно применить формулу (31).

3. Скалярное произведение двух векторных произведений.

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами смешанного произведения и формулой (31) для двойного векторного произведения. Обозначим $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{u}$. Тогда $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{u}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{u}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = ([\mathbf{u}, \mathbf{c}], \mathbf{d}) = ([[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}], \mathbf{d}) = (\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \mathbf{d}) = (\mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})$. \square

Вычисление площадей в произвольной системе координат.

Пара линейно независимых векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ образует базис на плоскости $\mathbf{E}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (линейная оболочка векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , см. общее определение в §4.4). Обозначим следующим образом

матрицу скалярного произведения на $\mathbf{E}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в этом базисе (матрицы такого вида называют матрицами Грама):

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Полагая в (33) $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{d} = \mathbf{b}$, получаем следующую формулу для вычисления площади параллелограмма $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$S_{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \sqrt{\det G(\mathbf{a}, \mathbf{b})}.$$

4. Векторное произведение двух векторных произведений.

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}). \quad (34)$$

Доказательство. Обозначим для удобства $\mathbf{u} = [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ и воспользуемся формулой (31) для произведения $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{u}]$. Имеем: $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{u}] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. \square

Общий вектор двух плоскостей $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathcal{L}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$.

Пользуясь кососимметричностью векторного произведения и формулой (34), получаем

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = [[\mathbf{d}, \mathbf{c}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

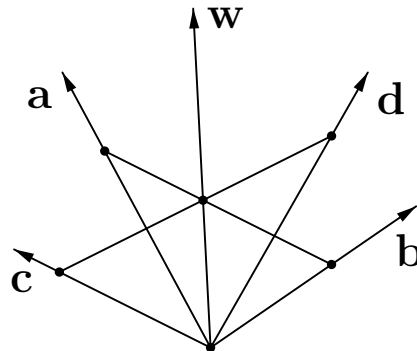


Рис. 14.

Отсюда следует, что вектор

$$\mathbf{w} = [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]$$

принадлежит каждой из плоскостей $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathcal{L}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, см. рисунок 14.

5. Произведение двух смешанных произведений.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{u}) & (\mathbf{a}, \mathbf{v}) & (\mathbf{a}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{u}) & (\mathbf{b}, \mathbf{v}) & (\mathbf{b}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{u}) & (\mathbf{c}, \mathbf{v}) & (\mathbf{c}, \mathbf{w}) \end{vmatrix}. \quad (35)$$

Доказательство. Выберем в \mathbf{E}_3 некоторый правый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_i\}$. Тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det A$, а $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{pmatrix}.$$

Формула (35) теперь следует из известного (см. [6], гл.3, §13) матричного тождества $\det A \det B = \det(AB)$. Действительно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det A \det B = \det A \det B^\top = \det(AB^\top)$, что совпадает со значением определителя, стоящего в правой части равенства (35). \square

Вычисление объемов в произвольной системе координат.

Следующая формула является частным случаем формулы (35):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Она может использоваться при вычислении объема $V_{P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$ параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

Вводя обозначение

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{pmatrix},$$

получаем:

$$V_{P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \sqrt{\det G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}. \quad (37)$$

В частности, применяя формулу (37) к тройке векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 правого ортонормированного базиса в \mathbf{E}_3 , получаем

$$\varepsilon_{123} = \sqrt{\det (g_{ij})}.$$

6. Произведение двух косых произведений.

Имеются очевидные аналоги формул предыдущего пункта для косого произведения на ориентированной плоскости:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \sqrt{\det (g_{ij})}.$$

2.4 Взаимные базисы в \mathbf{E}_3 .

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — некоторый базис в \mathbf{E}_3 . Всякий вектор \mathbf{a} однозначно определяется скалярными произведениями $a_i = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Действительно, пусть $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$ — некоторый вектор, для которого $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = a_i$, $i = 1, 2, 3$, а (g_{ij}) — матрица скалярного произведения в базисе $\{\mathbf{e}_k\}$. Тогда $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = (x^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = x^k g_{ki}$, и координаты x^i вектора \mathbf{x} однозначно находятся из системы уравнений $g_{ki} x^k = a_i$, матрица которой невырождена.

Поэтому соотношения

$$(\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (38)$$

однозначно определяют набор векторов

$$\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}. \quad (39)$$

Этот набор является базисом. Действительно, пусть $\mathbf{e}_i^* = x_i^k \mathbf{e}_k$ — разложение вектора \mathbf{e}_i^* по базису $\{\mathbf{e}_k\}$. Тогда из (38) следует $\delta_{ij} = (x_i^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x_i^k g_{kj}$, что эквивалентно соотношению

$$g_{jk} x_i^k = \delta_{ij}. \quad (40)$$

В матричной записи соотношения (40) принимают вид $G X = E$, где $G = (g_{jk})$, $X = (x_i^k)$, а $E = (\delta_{ij})$ — единичная матрица, поэтому $X = G^{-1}$ — матрица, обратная к матрице скалярного произведения $G = (g_{jk})$. Таким образом, X — невырожденная матрица и $\mathbf{e}_i^* = x_i^k \mathbf{e}_k$, $i = 1, 2, 3$, — базис. Базис (39) называется *взаимным*, а также *дуальным* или *двойственным*, базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Ясно, что если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ ортонормированный, то $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i$. Легко проверить, что векторы взаимного базиса $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ следующим образом выражаются через векторы исходного базиса:

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}_2^* = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}_3^* = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \quad (41)$$

Умножая скалярно векторы взаимного базиса \mathbf{e}_i^* на произвольный вектор $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$, получим координаты a^i этого вектора в первоначальном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$a^i = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i^*), \quad i = 1, 2, 3.$$

При этом числа a_i являются координатами вектора \mathbf{a} в базисе $\{\mathbf{e}_i^*\}$, а скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно вычислять по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3.$$

2.5 Примеры.

Задача 8. Векторы единичной длины \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 образуют правый базис и имеют направления ребер правильного тетраэдра,

выходящих из одной вершины. В этом базисе своими координатами заданы векторы $\mathbf{a} = \{1; 1; 0\}$, $\mathbf{b} = \{0; 1; 1\}$ и $\mathbf{c} = \{1; 0; 1\}$. Вычислить объем параллелепипеда $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

Решение. 1-ый способ. Матрица скалярного произведения (g_{ij}) в рассматриваемом базисе имеет вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varepsilon_{123} = \sqrt{\det(g_{ij})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$$V_{P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}.$$

2-ой способ. Пользуясь формулой $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 + \frac{1}{2}(a^1b^2 + a^1b^3 + a^2b^1 + a^2b^3 + a^3b^1 + a^3b^2)$, находим матрицу

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix},$$

а затем и $V_{P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \sqrt{\det G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \sqrt{2}$.

Рекомендуемая литература: [4], Гл. 2, §3; [1], Гл. I, §4.8.

Задачи и упражнения: [2], 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1230, 1232, 1233, 1234, 1236, 1237, 1239; [13], 1075, 1084, 1092, 1093*.

3 Элементы сферической геометрии.

Рассмотрим в пространстве \mathcal{E}_3 систему координат $Oxyz$, определяемую правым ортонормированным репером $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Сфера

\mathbf{S} радиуса 1 с центром в начале координат O имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \iff \mathbf{r}^2 = 1.$$

Три точки $A, B, C \in \mathbf{S}$, радиус-векторы которых не компланарны, и дуги больших окружностей (то есть окружностей, лежащих в плоскостях, проходящих через центр сферы) с центральными углами меньшими π , соединяющие точки A, B и C , образуют сферический треугольник ABC . Обозначим длины сторон этого треугольника, лежащих против вершин A, B и C , соответственно буквами a, b и c . При этом $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$ и $c = \angle AOB$. По определению, угол $\angle C$ сферического треугольника ABC при вершине C равен углу между прямыми, проходящими через точку C и касающимися дуг окружностей CB и CA , он совпадает с углом между плоскостями BOC и AOC .

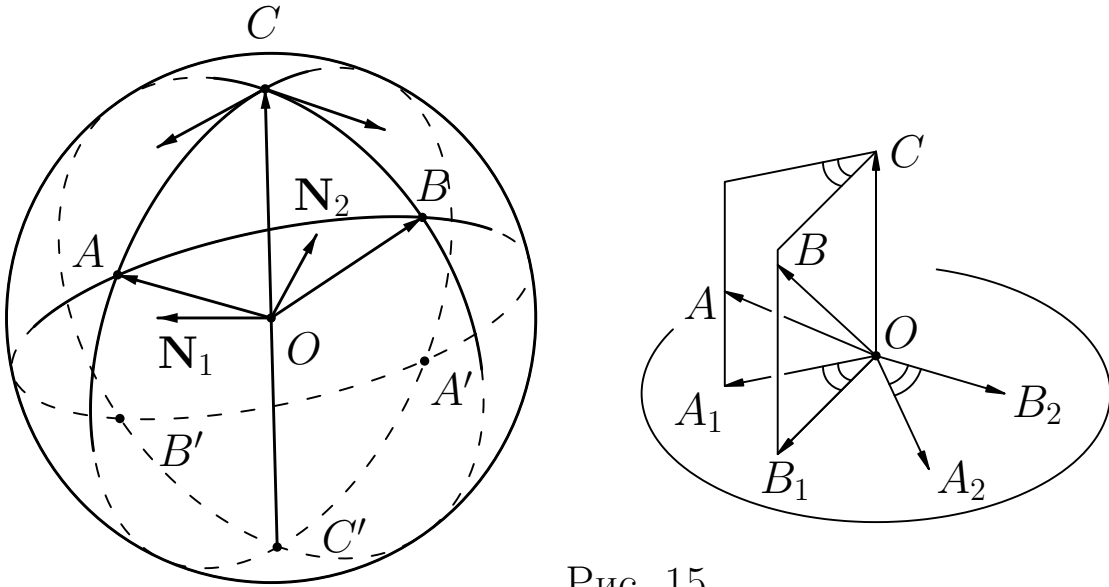


Рис. 15.

Пусть π — плоскость, проходящая через центр сферы перпендикулярно вектору \overrightarrow{OC} , а C' — точка сферы, диаметрально противоположная точке C . Плоскость π пересекает дуги CBC' и CAC' , соответственно, в точках B_1 и A_1 . Угол между плоскостями BOC и AOC равен углу $\angle B_1OA_1$ или углу $\angle B_2OA_2$ между векторами $\overrightarrow{OB_2}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, получающимися из векторов $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OA_1}$

поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ в плоскости π . В соответствии с согласованными ориентациями пространства и плоскости π , этот угол равен углу между векторами $\mathbf{N}_1 = [\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B]$ и $\mathbf{N}_2 = [\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]$, ортогональными соответственно плоскостям BOC и AOC . Вектор \mathbf{N} , ортогональный плоскости α , называется нормальным вектором этой плоскости.

Таким образом, угол C сферического треугольника ABC равен углу между нормальными векторами $\mathbf{N}_1 = [\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B]$ и $\mathbf{N}_2 = [\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]$, поэтому, в соответствии с формулой (33),

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{([\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B][\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A])}{|[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B]| |[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]|} = \frac{1}{\sin a \sin b} \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_C) & (\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A) \\ (\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) & (\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sin a \sin b} \begin{vmatrix} 1 & \cos b \\ \cos a & \cos c \end{vmatrix} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad (42)$$

Соотношение между сторонами и углами сферического треугольника, выражаемое формулой (42), называется *сферической теоремой косинусов*. Если угол C равен $\frac{\pi}{2}$, то из формулы (42) следует

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad (43)$$

Формула (43) отражает соотношение между сторонами прямоугольного сферического треугольника, называемое *сферической теоремой Пифагора*.

Замечание. Теорема косинусов (42) позволяет найти углы сферического треугольника, если известны его стороны. В частности, из нее следует, что сферический треугольник с точностью до равенства определяется своими сторонами (аналог третьего признака равенства треугольников на плоскости).

Далее, пользуясь формулой (34), получим

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{|[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B][\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]|}{|[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B]| |[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]|} = \frac{|\mathbf{r}_B(\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A) - \mathbf{r}_C(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A)|}{\sin a \sin b} = \\ &= \frac{|\mathbf{r}_C| \cdot |(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A)|}{\sin a \sin b} = \frac{|(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A)|}{\sin a \sin b}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{|(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A)|}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Правая часть последнего равенства не зависит от выбора угла треугольника ABC , откуда следует, что стороны и углы сферического треугольника ABC связаны соотношением

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \quad (44)$$

называемым *сферической теоремой синусов*.

При рассмотрении сферы произвольного радиуса R формулы (42) и (44) переходят соответственно в следующие:

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos C \quad (45)$$

и

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{R}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{R}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{R}}. \quad (46)$$

При стремлении R к бесконечности

$$\cos \frac{c}{R} = 1 - \frac{c^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \sin \frac{c}{R} = \frac{c}{R} + o\left(\frac{1}{R^2}\right). \quad (47)$$

Подставляя формулы (47) в (45) и (46) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим, что при стремлении R к бесконечности сферические теоремы косинусов и синусов переходят в соответствующие теоремы евклидовой геометрии.

Сферический треугольник ABC является пересечением трех сферических двуугольников со сторонами, соответственно, ABA'

и ACA' , BAB' и BCB' , CAC' и CBC' . Площади этих двуугольников равны соответственно $2AR^2$, $2BR^2$ и $2CR^2$. Объединение трех удвоенных таких двуугольников покрывает сферу \mathbf{S} , но при этом каждый из (равных) треугольников ABC и $A'B'C'$ покрывается три раза. Отсюда для площади $S_{\triangle ABC}$ треугольника ABC получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} 4(A + B + C)R^2 &= 4\pi R^2 + 4S_{\triangle ABC} \iff \\ \iff S_{\triangle ABC} &= (A + B + C - \pi)R^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Величина $\delta = A + B + C - \pi$, входящая в формулу (48) для площади сферического треугольника, называется *угловым избытком*.

Замечание. Если отождествить диаметрально противоположные точки сферы \mathbf{S} , то есть перейти к фактор-множеству \mathbf{S}/\sim по следующему отношению эквивалентности: $M \sim N$, если $\mathbf{r}_M = \pm \mathbf{r}_N$, то возникает так называемая *эллиптическая плоскость Римана* — одна из двумерных неевклидовых геометрий, в которой прямыми линиями являются большие окружности с отождествленными диаметрально противоположными точками. Всякие две различные прямые эллиптической плоскости пересекаются в одной точке. Из формулы (48), в частности, следует, что на эллиптической плоскости (и на сфере) сумма углов любого треугольника больше 180° .

Полярный треугольник.

Пусть \mathbf{S} — сфера радиуса 1 с центром в начале координат O в пространстве \mathcal{E}_3 и ABC — треугольник на сфере \mathbf{S} . Треугольник $A^*B^*C^*$, вершины которого задаются радиус-векторами:

$$\mathbf{r}_{A^*} = \frac{[\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C]}{||[\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C]||}, \quad \mathbf{r}_{B^*} = \frac{[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]}{||[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]||}, \quad \mathbf{r}_{C^*} = \frac{[\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B]}{||[\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B]||}, \quad (49)$$

называется треугольником, *полярным* треугольнику ABC . Радиус-векторы \mathbf{r}_A , \mathbf{r}_B , \mathbf{r}_C вершин треугольника ABC образуют

базис в пространстве \mathbf{E}_3 , и радиус-векторы \mathbf{r}_{A^*} , \mathbf{r}_{B^*} , \mathbf{r}_{C^*} вершин полярного треугольника направлены так же как и векторы взаимного базиса \mathbf{r}_A^* , \mathbf{r}_B^* , \mathbf{r}_C^* :

$$\mathbf{r}_{A^*} \uparrow\uparrow \mathbf{r}_A^*, \quad \mathbf{r}_{B^*} \uparrow\uparrow \mathbf{r}_B^*, \quad \mathbf{r}_{C^*} \uparrow\uparrow \mathbf{r}_C^*.$$

Отсюда, в частности, следует, что треугольник ABC является полярным треугольником треугольника $A^*B^*C^*$.

Сторона $c^* = \smile A^*B^*$ измеряется углом между векторами \mathbf{r}_{A^*} и \mathbf{r}_{B^*} или, в соответствии с (49), углом между векторами $[\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C]$ и $[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]$. Поскольку $[\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C] = -[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B]$, а угол между $[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B]$ и $[\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_A]$ равен углу C , то $c^* = \pi - C$. Аналогичные соотношения получаются и для сторон a^* и b^* . В результате, стороны треугольника $A^*B^*C^*$ и углы треугольника ABC оказываются связанными соотношениями

$$a^* = \pi - A, \quad b^* = \pi - B, \quad c^* = \pi - C. \quad (50)$$

Поскольку треугольники ABC и $A^*B^*C^*$ взаимно полярны, то стороны треугольника ABC и углы треугольника $A^*B^*C^*$ связаны аналогичными соотношениями

$$A^* = \pi - a, \quad B^* = \pi - b, \quad C^* = \pi - c. \quad (51)$$

Записывая теорему косинусов (42) для треугольника $A^*B^*C^*$ и заменяя стороны и углы треугольника $A^*B^*C^*$ их выражениями (50) и (51) через углы и стороны треугольника ABC , получим $\cos c^* = \cos a^* \cos b^* + \sin a^* \sin b^* \cos C^* \Leftrightarrow \cos(\pi - C) = \cos(\pi - A) \cos(\pi - B) + \sin(\pi - A) \sin(\pi - B) \cos(\pi - c) \Leftrightarrow -\cos C = (-\cos A)(-\cos B) + \sin A \sin B(-\cos c)$ или, окончательно,

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \quad (52)$$

Соотношение между сторонами и углами сферического треугольника, выражаемое формулой (52), называется *двойственной сферической теоремой косинусов*. Двойственная теорема косинусов (52) позволяет найти стороны сферического треугольника,

если известны его углы. В частности, из нее следует, что сферический треугольник с точностью до равенства определяется своими углами. Поэтому на сфере (и на эллиптической плоскости, см. Замечание выше) имеет место еще один признак равенства треугольников: *если углы одного треугольника равны соответственным углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

4 Сопряженное векторное пространство.

Прямая на аффинной плоскости \mathcal{A}_2 задается уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3 = 0$, а плоскость в трехмерном аффинном пространстве \mathcal{A}_3 уравнением $A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4 = 0$. Рассмотрим, в более общей ситуации, уравнение $A_ix^i + A_{n+1} = 0$, задающее гиперплоскость (то есть $(n - 1)$ -плоскость) в аффинном пространстве \mathcal{A}_n . Если в уравнение гиперплоскости подставить формулы (6) преобразования аффинных координат: $x^i = p_{i'}^i x^{i'} + b^i$, то рассматриваемая гиперплоскость в новой системе координат будет задаваться уравнением $A_{i'}x^{i'} + A_{(n+1)'} = 0$, где

$$A_{i'} = p_{i'}^i A_i. \quad (53)$$

Формулы (53) преобразования коэффициентов A_i аналогичны формулам (4) преобразования координат вектора $a^{i'} = p_{i'}^i a^i$: одни получаются из других транспонированием. Это объясняется тем, что наборы коэффициентов $\{A_i\}$ являются координатами некоторого вектора из векторного пространства \mathbf{V}_n^* , сопряженного векторному пространству \mathbf{V}_n , ассоциированному с аффинным пространством \mathcal{A}_n . В частности, наборы коэффициентов $\{A_1, A_2\}$ и $\{A_1, A_2, A_3\}$ уравнений прямых и плоскостей оказываются, соответственно, наборами координат некоторых векторов из векторных пространств \mathbf{V}_2^* и \mathbf{V}_3^* , сопряженных вектор-

ным пространствам \mathbf{V}_2 и \mathbf{V}_3 , ассоциированным с аффинными пространствами \mathcal{A}_2 и \mathcal{A}_3 .

4.1 Линейные формы на векторном пространстве.

Линейной функцией или *линейной формой* на векторном пространстве \mathbf{V}_n называется линейное отображение $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{R}$. Напомним, что линейность f означает, что

$$f(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b}) \quad \text{для любых } \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}_n.$$

Обозначим символом \mathbf{V}_n^* множество всех линейных форм на \mathbf{V}_n . Естественным образом определяются операции сложения линейных форм и умножения линейной формы на вещественное число:

$$(f_1 + f_2)(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{a}) + f_2(\mathbf{a}), \quad (\lambda \cdot f)(\mathbf{a}) = \lambda \cdot (f(\mathbf{a})).$$

При этом отображения $f_1 + f_2 : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{R}$ и $\lambda \cdot f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{R}$ оказываются снова линейными, то есть $f_1 + f_2 \in \mathbf{V}_n^*$ и $\lambda \cdot f \in \mathbf{V}_n^*$. Проверим это для отображения $f_1 + f_2$. Имеем: $(f_1 + f_2)(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = f_1(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) + f_2(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda f_1(\mathbf{a}) + \mu f_1(\mathbf{b}) + \lambda f_2(\mathbf{a}) + \mu f_2(\mathbf{b}) = \lambda(f_1(\mathbf{a}) + f_2(\mathbf{a})) + \mu(f_1(\mathbf{b}) + f_2(\mathbf{b})) = \lambda(f_1 + f_2)(\mathbf{a}) + \mu(f_1 + f_2)(\mathbf{b})$.

Предложение. Множество \mathbf{V}_n^* с введенными операциями $+$: $\mathbf{V}_n^* \times \mathbf{V}_n^* \ni \{f_1, f_2\} \mapsto f_1 + f_2 \in \mathbf{V}_n^*$ и \cdot : $\mathbf{R} \times \mathbf{V}_n^* \ni \{\lambda, f\} \mapsto \lambda \cdot f \in \mathbf{V}_n^*$ является векторным пространством размерности n .

Доказательство. Аксиомы векторного пространства 1° – 8° легко выводятся из соответствующих свойств поля вещественных чисел \mathbf{R} , являющегося одномерным векторным пространством. Отметим только, что нулевым вектором в \mathbf{V}_n^* является

линейная форма $\tilde{\mathbf{0}}$, принимающая нулевое значение на всех векторах из \mathbf{V}_n : $\tilde{\mathbf{0}}(\mathbf{a}) = 0$ для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$, а противоположным вектором к $f \in \mathbf{V}_n^*$ является линейная форма $-f = (-1) \cdot f$. \square

Определение. Векторное пространство \mathbf{V}_n^* называется пространством, сопряженным пространству \mathbf{V}_n .

Элементы пространства \mathbf{V}_n^* будем обозначать в дальнейшем полужирными латинскими буквами с волнистой линией наверху (эта линия называется «тильда»): $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}$ и так далее.

Чтобы определить размерность пространства \mathbf{V}_n^* , достаточно найти в этом пространстве какой-нибудь базис. Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$, $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$, — некоторый базис в \mathbf{V}_n , и $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ — разложение произвольного вектора из пространства \mathbf{V}_n по векторам этого базиса. Отображение

$$\tilde{\mathbf{e}}^i : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto a^i \in \mathbf{R},$$

относящее вектору \mathbf{a} его i -тую координату относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, является линейным и, следовательно, $\tilde{\mathbf{e}}^i \in \mathbf{V}_n^*$. Проверим, что $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, — базис в пространстве \mathbf{V}_n^* . Действительно, всякая линейная форма $\tilde{\mathbf{w}}$ может быть представлена в виде линейной комбинации форм $\tilde{\mathbf{e}}^i$: $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{w}}(a^i \mathbf{e}_i) = a^i \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i) \tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{a}) = (\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i) \tilde{\mathbf{e}}^i)(\mathbf{a})$. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{w}} = w_i \tilde{\mathbf{e}}^i, \quad \text{где} \quad w_i = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i).$$

Остается показать, что линейные формы $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$ линейно независимы. Нам потребуется следующее соотношение, вытекающее непосредственно из определения форм $\tilde{\mathbf{e}}^i$:

$$\tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i.$$

Предположим теперь, что $\lambda_i \tilde{\mathbf{e}}^i = \tilde{\mathbf{0}}$. Тогда $(\lambda_i \tilde{\mathbf{e}}^i)(\mathbf{a}) = 0$ для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$. Следовательно, в частности, для любого $j = 1, 2, \dots, n$ имеем: $(\lambda_i \tilde{\mathbf{e}}^i)(\mathbf{e}_j) = 0 \implies \lambda_i \tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = 0 \implies$

$\lambda_i \delta_j^i = 0 \implies \lambda_j = 0$. Таким образом, нулю может равняться только тривиальная комбинация форм $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$.

Определение. Базис $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$ пространства \mathbf{V}_n^* называется базисом, сопряженным базису $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства \mathbf{V}_n .

Числа $w_i = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i)$ являются координатами линейной формы $\tilde{\mathbf{w}}$ в базисе $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$ пространства \mathbf{V}_n^* . Их называют также координатами линейной формы $\tilde{\mathbf{w}}$ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ начального векторного пространства \mathbf{V}_n .

Если линейная форма $\tilde{\mathbf{w}}$ и вектор \mathbf{a} заданы своими координатами w_i и a^i в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, то

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = w_i a^i = w_1 a^1 + w_2 a^2 + \dots + w_n a^n. \quad (54)$$

Действительно, $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = w_i \tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{a}) = w_i a^i$.

Замечание. Очевидно, отображение $\tilde{\mathbf{w}} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{R}$, определяемое формулой (54) в некотором базисе пространства \mathbf{V}_n , является линейной формой на \mathbf{V}_n . Действительно, $\tilde{\mathbf{w}}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = w_i(\lambda a^i + \mu b^i) = \lambda w_i a^i + \mu w_i b^i = \lambda \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) + \mu \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{b})$.

4.2 Второе сопряженное пространство.

Пространство \mathbf{V}_n^{**} , сопряженное \mathbf{V}_n^* , состоит из линейных форм $\hat{\mathbf{u}} : \mathbf{V}_n^* \rightarrow \mathbf{R}$.

Предложение. Имеется канонический изоморфизм

$$\varphi : \mathbf{V}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{V}_n^{**},$$

определяемый следующим образом:

$$\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}). \quad (55)$$

Доказательство. Из формулы (54) и сделанного выше замечания следует, что $\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{w}}) = a^i w_i = a^1 w_1 + a^2 w_2 + \dots + a^n w_n$,

поэтому $\hat{\mathbf{a}}$ — линейная форма, то есть $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{V}_n^{**}$. Этот факт следует также непосредственно из определения (55): $\hat{\mathbf{a}}(\lambda\tilde{\mathbf{u}} + \mu\tilde{\mathbf{w}}) = (\lambda\tilde{\mathbf{u}} + \mu\tilde{\mathbf{w}})(\mathbf{a}) = \lambda\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) + \mu\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \lambda\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mu\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{w}})$. Легко проверяется, что $\varphi : \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \mapsto \lambda\hat{\mathbf{a}} + \mu\hat{\mathbf{b}}$. Действительно, используя обозначение $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^\wedge$, имеем: $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})^\wedge(\tilde{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathbf{w}}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) + \mu\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{b}) = \lambda\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{w}}) + \mu\hat{\mathbf{b}}(\tilde{\mathbf{w}}) = (\lambda\hat{\mathbf{a}} + \mu\hat{\mathbf{b}})(\tilde{\mathbf{w}})$. Для того, чтобы доказать, что φ — изоморфизм, достаточно показать, что для любого базиса $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, пространства \mathbf{V}_n набор векторов $\{\hat{\mathbf{e}}_i = \varphi(\mathbf{e}_i)\}$, $i = 1, \dots, n$, представляет собой базис пространства \mathbf{V}_n^{**} , сопряженный базису $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$. При этом отображение φ устанавливает соответствие между векторами пространств \mathbf{V}_n и \mathbf{V}_n^{**} , имеющими одинаковые координаты, соответственно, в базисах $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$. Действительно, $\hat{\mathbf{e}}_i(\tilde{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i) = w_i$, и, по определению сопряженного базиса, набор $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ — базис пространства \mathbf{V}_n^{**} , сопряженный базису $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$. \square

Принято отождествлять пространства \mathbf{V}_n и \mathbf{V}_n^{**} , считая, что $\mathbf{a} \equiv \hat{\mathbf{a}}$. При этом

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{w}}) = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{a} \rangle,$$

где

$$\delta : \mathbf{V}_n^* \times \mathbf{V}_n \ni \{\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{a}\} \mapsto \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbf{R}$$

— билинейное отображение, называемое *операцией свертки* линейной формы и вектора.

4.3 Преобразование координат линейной формы.

При замене базиса $\mathbf{e}_{i'} = p_{i'}^i \mathbf{e}_i$ в \mathbf{V}_n координаты линейной формы $\tilde{\mathbf{w}}$ преобразуются следующим образом:

$$w_{i'} = p_{i'}^i w_i = p_{i'}^1 w_1 + p_{i'}^2 w_2 + \dots + p_{i'}^n w_n, \quad w_i = p_i^{i'} w_{i'}. \quad (56)$$

Для доказательства этого нужно вычислить значения формы $\tilde{\mathbf{w}}$ на векторах нового базиса: $w_{i'} = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_{i'}) = \tilde{\mathbf{w}}(p_{i'}^i \mathbf{e}_i) = p_{i'}^i \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{e}_i) =$

$p_i^i w_i$. В матричном виде формулы (56) выглядят следующим образом:

$$(w_{1'} w_{2'} \dots w_{n'}) = (w_1 w_2 \dots w_n) \begin{pmatrix} p_{1'}^1 & p_{2'}^1 & \dots & p_{n'}^1 \\ p_{1'}^2 & p_{2'}^2 & \dots & p_{n'}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1'}^n & p_{2'}^n & \dots & p_{n'}^n \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Закон преобразования (56) называется *ковариантным*, а закон преобразования (3) *контравариантным*. Поэтому линейные формы называют также *ковариантными векторами* или *ковекторами*.

4.4 Аннулятор подпространства $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$.

Определение. Пусть S — некоторое подмножество в векторном пространстве \mathbf{V}_n . Линейной оболочкой $\mathcal{L}(S)$ этого подмножества называется множество векторов из \mathbf{V}_n , представимых в виде линейных комбинаций векторов из S , то есть:

$$\mathcal{L}(S) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n \mid \mathbf{a} = \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \lambda^2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda^k \mathbf{b}_k\},$$

где $\lambda^1, \dots, \lambda^k \in \mathbf{R}$, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in S$, k — произвольное натуральное число.

Очевидно, $\mathcal{L}(S)$ — подпространство в \mathbf{V}_n , и $\mathcal{L}(S)$ — наименьшее подпространство, содержащее подмножество S , то есть подпространство, содержащееся во всяком подпространстве, содержащем подмножество S .

Определение. Пусть S — некоторое подмножество в векторном пространстве \mathbf{V}_n . Аннулятором этого подмножества называется подмножество в сопряженном пространстве \mathbf{V}_n^* , состоящее из линейных форм, принимающих значение нуль на всех векторах из S :

$$\text{Ann}(S) = \{\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbf{V}_n^* \mid \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) = 0 \ \forall \mathbf{a} \in S\}.$$

Предложение.

- 1) $\text{Ann}(S) \subset \mathbf{V}_n^*$ — подпространство;
- 2) $\text{Ann}(\mathcal{L}(S)) = \text{Ann}(S)$.

Доказательство. 1) $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \text{Ann}(S) \implies \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = 0$ для любого $\mathbf{a} \in S \implies (\lambda\tilde{\mathbf{u}} + \mu\tilde{\mathbf{v}})(\mathbf{a}) = 0$ для любого $\mathbf{a} \in S \implies \lambda\tilde{\mathbf{u}} + \mu\tilde{\mathbf{v}} \in \text{Ann}(S)$.

2) Включение " \subset ". Так как $S \subset \mathcal{L}(S)$ и всякая линейная форма, обращающаяся в нуль на большем подмножестве $\mathcal{L}(S)$, обращается в нуль и на меньшем подмножестве S , то, очевидно, $\text{Ann}(\mathcal{L}(S)) \subset \text{Ann}(S)$.

Включение " \supset ". Пусть $\tilde{\mathbf{u}} \in \text{Ann}(S)$. Произвольный элемент $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(S)$ имеет вид $\mathbf{a} = \lambda^1 \mathbf{b}_1 + \lambda^2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda^k \mathbf{b}_k$, где $\lambda^1, \dots, \lambda^k \in \mathbf{R}$, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in S$. Тогда $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lambda^1 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b}_1) + \lambda^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b}_2) + \dots + \lambda^k \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b}_k) = 0 \implies \tilde{\mathbf{u}} \in \text{Ann}(\mathcal{L}(S))$. Таким образом, $\text{Ann}(\mathcal{L}(S)) \supset \text{Ann}(S)$. \square

Следствие. Пусть $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ — базис в подпространстве $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$, тогда

$$\text{Ann}(\mathbf{L}_m) = \text{Ann}(\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}).$$

В координатах для нахождения аннулятора $\text{Ann}(\mathbf{L}_m)$ нужно решить систему линейных однородных уравнений

$$b_{\alpha}^1 w_1 + b_{\alpha}^2 w_2 + \dots + b_{\alpha}^n w_n = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

относительно координат w_i линейной формы $\tilde{\mathbf{w}}$, матрица которой (b_{α}^i) , $\alpha = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, составлена из координат векторов $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$, образующих базис подпространства \mathbf{L}_m . Поскольку ранг этой матрицы равен m , то решения системы образуют подпространство размерности $n - m$ (см. [6], §12). Отсюда следует

Предложение. $\dim \text{Ann}(\mathbf{L}_m) = n - \dim(\mathbf{L}_m) = n - m$.

Следующее предложение устанавливает взаимно однозначное соответствие между подпространствами в \mathbf{V}_n и \mathbf{V}_n^* .

Предложение. $\text{Ann}(\text{Ann}(\mathbf{L}_m)) = \mathbf{L}_m$.

Доказательство. Если $\mathbf{a} \in \mathbf{L}_m$, то $\langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{a} \rangle = 0$ для любого $\tilde{\mathbf{w}} \in \text{Ann}(\mathbf{L}_m)$ и, следовательно, $\mathbf{a} \in \text{Ann}(\text{Ann}(\mathbf{L}_m))$. Поэтому $\mathbf{L}_m \subset \text{Ann}(\text{Ann}(\mathbf{L}_m))$. Но по предыдущему предложению $\dim \text{Ann}(\text{Ann}(\mathbf{L}_m)) = n - (n - m) = m = \dim \mathbf{L}_m$. Поскольку (по основной лемме о линейной зависимости) подпространство, размерность которого совпадает с размерностью пространства, совпадает со всем пространством, отсюда следует, что $\text{Ann}(\text{Ann}(\mathbf{L}_m)) = \mathbf{L}_m$. \square

Способы задания подпространства в \mathbf{V}_n .

Как следует из рассуждений настоящего параграфа, имеются следующие два способа задания подпространства $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{V}_n$.

1. Подпространство \mathbf{L}_m может быть задано как линейная оболочка $\mathcal{L}(\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\})$ своего базиса $\{\mathbf{b}_\alpha\} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$. В этом случае произвольный вектор из \mathbf{L}_m имеет вид

$$\mathbf{v} = t^\alpha \mathbf{b}_\alpha = t^1 \mathbf{b}_1 + t^2 \mathbf{b}_2 + \dots + t^m \mathbf{b}_m. \quad (58)$$

Уравнения (58) называются *параметрическими уравнениями* подпространства \mathbf{L}_m . В координатах пространства \mathbf{V}_n эти уравнения принимают вид

$$v^i = t^1 b_1^i + t^2 b_2^i + \dots + t^m b_m^i. \quad (59)$$

Параметры t^α , $\alpha = 1, 2, \dots, m$, — координаты вектора \mathbf{v} в базисе $\{\mathbf{b}_\alpha\}$ подпространства \mathbf{L}_m .

2. Подпространство \mathbf{L}_m может быть задано как множество векторов, на которых обращаются в нуль линейные формы из $\text{Ann}(\mathbf{L}_m)$. Если $\{\tilde{\mathbf{w}}^a\} = \{\tilde{\mathbf{w}}^1, \tilde{\mathbf{w}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{w}}^k\}$, $k = n - m$, — некоторый базис в $\text{Ann}(\mathbf{L}_m)$, то подпространство \mathbf{L}_m задается системой

уравнений

$$\widetilde{\mathbf{w}}^a(\mathbf{v}) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, k = n - m. \quad (60)$$

В координатах пространства \mathbf{V}_n уравнения (60) принимают вид

[illegible]

Формула (59) при этом представляет собой общее решение системы уравнений (61).

Замечание. Случаи $m = 0$ и $m = n$ не исключаются из рассмотрения. При этом $\text{Ann}(\mathbf{V}_n) = \mathbf{0}$, а $\text{Ann}(\mathbf{0}) = \mathbf{V}_n^*$.

4.5 Примеры.

Задача 9. Подпространство $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{V}_4$ задано в некотором базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ системой уравнений

$$\begin{cases} v^1 + 2v^2 - v^3 - v^4 &= 0 \\ 2v^1 - v^2 + v^3 &= 0. \end{cases}$$

Найти уравнения этого подпространства в новом базисе $\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_{4'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$.

Решение. Из уравнений, задающих подпространство \mathbf{L}_2 , следует, что $\text{Ann}(\mathbf{L}_2)$ является линейной оболочкой пары линейных форм $\tilde{\mathbf{w}}^1 = \{1; 2; -1; -1\}$, $\tilde{\mathbf{w}}^2 = \{2; -1; 1; 0\}$. Координаты линейных форм при переходе к новому базису преобразуются по формулам (57)

$$(w_{1'} \ w_{2'} \ w_{3'} \ w_{4'}) = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Подставляя в уравнения (62) координаты линейных форм $\tilde{\mathbf{w}}^1$ и $\tilde{\mathbf{w}}^2$, находим их новые координаты $\{1; 3; 2; 1\}$ и $\{2; 1; 2; 2\}$. Отсюда следует, что в новом базисе подпространство \mathbf{L}_2 может быть задано системой уравнений

$$\begin{cases} v^{1'} + 3v^{2'} + 2v^{3'} + v^{4'} = 0 \\ 2v^{1'} + v^{2'} + 2v^{3'} + 2v^{4'} = 0. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература: [9], Лекция 4; [5], Ч. I, §§1.9, 3.9, 3.10.

Задачи и упражнения: [11], 1845, [7], 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10.

5 Плоскость и прямая в трехмерном аффинном пространстве.

5.1 Уравнения плоскости в \mathcal{A}_3 .

Плоскость π в аффинном пространстве \mathcal{A}_3 определяется некоторой своей точкой $M_0 \in \pi$ и направляющим подпространством $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2(\pi)$. При этом

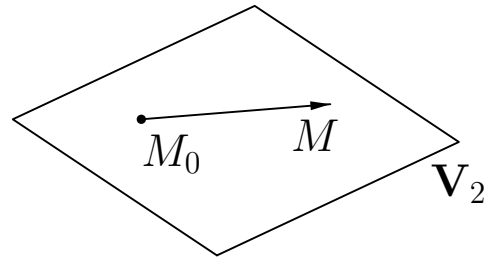


Рис. 16.

$$\pi = \{M \in \mathcal{A}_3 \mid \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{V}_2\}. \quad (63)$$

В зависимости от того, как задано направляющее подпространство $\mathbf{V}_2(\pi)$, возникают различные виды уравнений плоскости π .

Параметрические уравнения плоскости.

Пусть подпространство $\mathbf{V}_2(\pi)$ задано своим базисом $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$: $\mathbf{V}_2(\pi) = \mathcal{L}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$. Рассмотрим некоторый репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$ в \mathcal{A}_3

и обозначим $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{M_0}$. Условия (63) принадлежности точки M плоскости π можно представить в виде: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t^1 \mathbf{a}_1 + t^2 \mathbf{a}_2$, откуда получаем следующие уравнения плоскости π , называемые *параметрическими*:

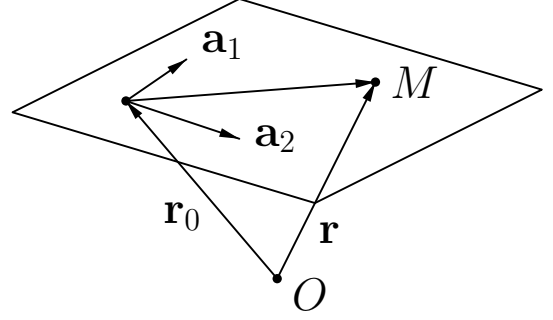


Рис. 17.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1 \mathbf{a}_1 + t^2 \mathbf{a}_2 \iff x^i = x_0^i + t^1 a_1^i + t^2 a_2^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (64)$$

В уравнениях (64) параметры t^1 и t^2 являются координатами точки M в репере $\{M_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ на плоскости π .

Общее уравнение плоскости.

Подпространство $\mathbf{V}_2(\pi)$ может быть задано как множество векторов, на которых обращаются в нуль линейные формы из аннулятора $\text{Ann}(\mathbf{V}_2(\pi))$. Так как $\dim \text{Ann}(\mathbf{V}_2(\pi)) = 1$, то базис аннулятора $\text{Ann}(\mathbf{V}_2(\pi))$ состоит из одной линейной формы $\tilde{\mathbf{A}}$. Поэтому (см.(26))

$$\mathbf{V}_2(\pi) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3 \mid \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{v} \rangle = 0\} = \ker(\tilde{\mathbf{A}}).$$

В этом случае условия (63) принадлежности точки M плоскости π принимают следующий вид:

$$\langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0 \iff A_i(x^i - x_0^i) = 0, \quad (65)$$

где A_i , $i = 1, 2, 3$, — набор координат линейной формы $\tilde{\mathbf{A}}$. После раскрытия скобок уравнение (65) приводится к виду

$$A_i x^i + A_4 = 0 \iff A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 = 0. \quad (66)$$

Уравнение (66) называется *общим уравнением* плоскости π .

Предложение. Уравнение (66) при любых значениях коэффициентов (коэффициенты A_1, A_2, A_3 предполагаются не равными нулю одновременно) задает некоторую плоскость в \mathcal{A}_3 .

Доказательство. Возьмем произвольное решение $x_0^i, i = 1, 2, 3$, уравнения (66), тогда $A_1x_0^1 + A_2x_0^2 + A_3x_0^3 + A_4 = 0$. Вычитая последнее соотношение из (66), получим эквивалентное ему уравнение, имеющее вид (65), которое является уравнением плоскости π , проходящей через точку M_0 с координатами (x_0^i) и имеющей направляющее подпространство $\ker(\tilde{\mathbf{A}})$, где $\tilde{\mathbf{A}} = \{A_1, A_2, A_3\}$. \square

Следствия. 1) Коэффициенты $\{A_1, A_2, A_3\}$ в уравнении (66) плоскости π — это координаты линейной формы $\tilde{\mathbf{A}}$, задающей направляющее подпространство $\mathbf{V}_2(\pi)$.

2) Имеет место следующее условие параллельности вектора \mathbf{a} и плоскости π : $\mathbf{a} \parallel \pi \iff A_i a^i = 0 \iff \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{a} \rangle = 0$.

Переход от параметрических уравнений плоскости к общему уравнению.

Для того, чтобы по уравнениям (64) плоскости π найти ее общее уравнение, достаточно записать условие линейной зависимости векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1$ и \mathbf{a}_2 :

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & x^3 - x_0^3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (67)$$

Можно также найти линейную форму $\tilde{\mathbf{A}}$, задающую $\mathbf{V}_2(\pi)$, решая систему уравнений

$$\langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{a}_1 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{a}_2 \rangle = 0.$$

Переход от общего уравнения плоскости к параметрическим уравнениям.

Для того, чтобы по общему уравнению (66) плоскости π найти ее параметрические уравнения, достаточно решить уравнение (66) методом Гаусса. Тогда частное решение уравнения (66)

задает точку $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, а фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения — это заданные координатами базисные векторы направляющего подпространства $\mathbf{V}_2(\pi)$. Например, если $A_1 \neq 0$, то плоскость π с уравнением (66) можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_4/A_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^1 \begin{pmatrix} -A_2/A_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -A_3/A_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения плоскости π , проходящей через три точки M_1 , M_2 и M_3 , не лежащие на одной прямой.

Для составления уравнений плоскости π нужно в уравнениях (64) или (67) положить $M_0 = M_1$, $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{M_1M_3}$.

Уравнения плоскости π , проходящей через две точки M_1 и M_2 и параллельной вектору \mathbf{b} .

Для составления уравнений плоскости π в этом случае нужно в уравнениях (64) или (67) положить $M_0 = M_1$, $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$.

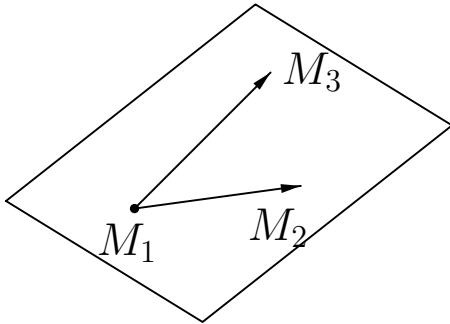


Рис. 18.

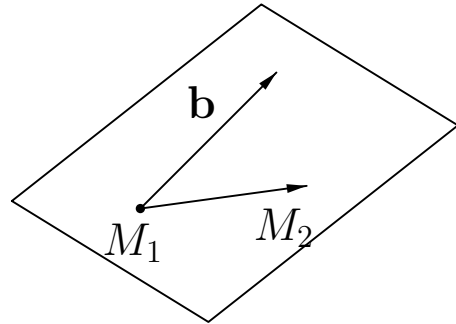


Рис. 19.

5.2 Уравнения прямой в \mathcal{A}_3 .

Прямая ℓ в аффинном пространстве \mathcal{A}_3 определяется некоторой своей точкой $M_0 \in \ell$ и направляющим подпространством

$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1(\ell)$. При этом

$$\ell = \{M \in \mathcal{A}_3 \mid \overrightarrow{M_0 M} \in \mathbf{V}_1\}. \quad (68)$$

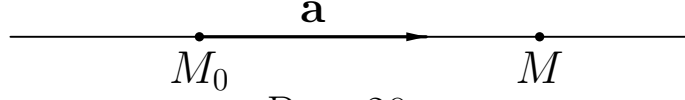


Рис. 20.

В зависимости от того, как задано направляющее подпространство $\mathbf{V}_1(\pi)$, возникают различные виды уравнений прямой ℓ .

Параметрические уравнения прямой.

Если $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_1(\ell)$ — ненулевой вектор (то есть $\{\mathbf{a}\}$ — базис в $\mathbf{V}_1(\ell)$), то условие (68) принадлежности точки M прямой ℓ можно представить в виде: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}$, откуда получаем *параметрические уравнения* прямой:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \iff x^i = x_0^i + ta^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (69)$$

В уравнениях (69) параметр t является координатой точки M в репере $\{M_0; \mathbf{a}\}$ на прямой ℓ .

Канонические уравнения прямой.

Условие $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{a}$ можно записать также в следующем виде:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \frac{x^3 - x_0^3}{a^3}. \quad (70)$$

Уравнения (70) принято называть *каноническими уравнениями* прямой.

Уравнения прямой ℓ , проходящей через две точки M_1 и M_2 .

Для составления уравнений ℓ нужно в уравнениях (69) или (70) положить $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$.

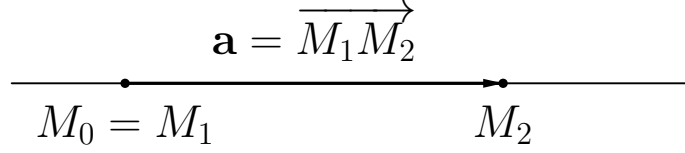


Рис. 21.

Прямая как линия пересечения двух плоскостей.

Подпространство $\mathbf{V}_1(\ell)$ может быть задано как множество векторов, на которых обращаются в нуль линейные формы из аннулятора $\text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell))$. Так как $\dim \text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell)) = 2$, то базис аннулятора $\text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell))$ состоит из двух линейных форм: $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$. Поэтому (см. (26))

$$\mathbf{V}_1(\ell) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3 \mid \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{v} \rangle = 0, \langle \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{v} \rangle = 0\}.$$

В этом случае условия (68) принадлежности точки M прямой ℓ принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0 \\ \langle \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 = 0 \text{ (a)} \\ B_1 x^1 + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 = 0 \text{ (b)} \end{cases} \quad (71)$$

Уравнения (71a) и (71b) задают в пространстве некоторые плоскости, обозначим их α и β , содержащие прямую ℓ (см. рисунок 22).

При любых λ и μ , не равных нулю одновременно, уравнение

$$\langle \lambda \tilde{\mathbf{A}} + \mu \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0 \iff$$

$$\lambda(A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4) + \mu(B_1 x^1 + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4) = 0 \quad (72)$$

задает некоторую плоскость γ , проходящую через прямую ℓ . Совокупность плоскостей, определяемых уравнением (72), называется *пучком* плоскостей. Если некоторая плоскость σ с уравнением $C_1 x^1 + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 = 0$ проходит через прямую ℓ ,

то линейная форма $\tilde{\mathbf{C}}$ с координатами $\{C_1, C_2, C_3\}$ обращается в нуль на направляющем подпространстве $\mathbf{V}_1(\ell)$ прямой ℓ . Следовательно, $\tilde{\mathbf{C}} \in \text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell))$ и, поэтому, $\tilde{\mathbf{C}} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{A}} + \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}$ для некоторых λ_0 и μ_0 . Это значит, что плоскость σ задается уравнением (72) при $\lambda = \lambda_0$ и $\mu = \mu_0$. Таким образом, пучок (72) содержит все плоскости, проходящие через прямую ℓ . Параметры λ и μ существенны с точностью до пропорциональности, то есть значениям параметров λ_0 , μ_0 и $\nu\lambda_0$, $\nu\mu_0$ соответствует одна и та же плоскость.

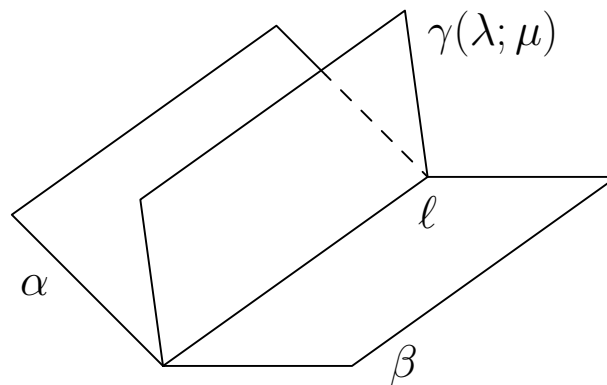


Рис. 22.

Замечание. Если плоскости α и β , заданные уравнениями (71a) и (71b) соответственно, параллельны (но не совпадают), то линейные формы $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ коллинеарны: $\tilde{\mathbf{B}} = \nu \tilde{\mathbf{A}}$. При этом, очевидно, и всякая линейная форма $\tilde{\mathbf{C}} = \lambda \tilde{\mathbf{A}} + \mu \tilde{\mathbf{B}}$ коллинеарна форме $\tilde{\mathbf{A}}$. В этом случае все плоскости с уравнениями (72) параллельны. Не трудно показать, что всякая плоскость, параллельная плоскостям α и β , может быть задана уравнением (72) при некоторых λ и μ . Уравнение (72) является в этом случае уравнением *пучка параллельных плоскостей*.

Переход от одного способа задания прямой к другому.

Чтобы по уравнениям прямой (71) получить параметрические уравнения этой прямой, нужно просто решить систему уравнений (71) методом Гаусса, см. пример ниже.

Чтобы по параметрическим уравнениям прямой получить систему уравнений вида (71), можно либо канонические уравнения (70) рассматривать как систему двух уравнений, либо найти $\text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell))$, решая уравнение.

$$\langle \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{a} \rangle = 0 \iff a^1 X_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3 = 0 \quad (73)$$

относительно неизвестной линейной формы $\tilde{\mathbf{X}}$. При $a^1 \neq 0$ линейно независимыми решениями уравнения (73), например, являются $\tilde{\mathbf{A}} = \{-a^2; a^1; 0\}$ и $\tilde{\mathbf{B}} = \{-a^3; 0; a^1\}$. При этом прямая (70) может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} -a^2(x^1 - x_0^1) + a^1(x^2 - x_0^2) = 0 \\ -a^3(x^1 - x_0^1) + a^1(x^3 - x_0^3) = 0. \end{cases}$$

5.3 Примеры.

Задача 10. Найти параметрические уравнения прямой ℓ :

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 4 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 - 3x^3 + 2 = 0. \end{cases} \quad (74)$$

Решение. Решаем систему уравнений (74) методом Гаусса. После несложных вычислений получаем:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Прямая ℓ имеет направляющий вектор $\mathbf{a} = \{2; 1; 2\}$ и проходит через точку $M_0(2; -3; 0)$.

Задача 11. Прямая ℓ задана параметрическими уравнениями: $x^1 = 1 + 2t$, $x^2 = 2 + t$, $x^3 = -3 + t$. Задать прямую ℓ системой двух линейных уравнений.

Решение. Прямая ℓ имеет направляющий вектор $\mathbf{a} = \{2; 1; 1\}$. Для нахождения $\text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell))$ решаем методом Гаусса уравнение $2A_1 + A_2 + A_3 = 0$ относительно координат $\{A_1; A_2; A_3\}$ линейной формы $\tilde{\mathbf{A}} \in \text{Ann}(\mathbf{V}_1(\ell))$. Это уравнение имеет два линейно независимых решения $\tilde{\mathbf{A}} = \{-1; 2; 0\}$ и $\tilde{\mathbf{B}} = \{-1; 0; 2\}$. Поскольку ℓ проходит через точку $M_0(1; 2; -3)$, то она задается системой уравнений

$$\begin{cases} -(x^1 - 1) + 2(x^2 - 2) + 0(x^3 + 3) = 0 \\ -(x^1 - 1) + 0(x^2 - 2) + 2(x^3 + 3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^1 + 2x^2 - 3 = 0 \\ -x^1 + 2x^3 + 7 = 0. \end{cases}$$

Задача 12. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M_0(1; 1; 2)$ и прямую ℓ , заданную системой уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 - 3x^2 + x^3 + 2 = 0 \\ x^1 - 4x^2 + x^3 + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Плоскость π принадлежит пучку плоскостей

$$\lambda(2x^1 - 3x^2 + x^3 + 2) + \mu(x^1 - 4x^2 + x^3 + 3) = 0. \quad (75)$$

Подставляя в уравнение (75) координаты точки M_0 , получаем уравнение $3\lambda + 2\mu = 0$, откуда находим $\lambda = 2$, $\mu = -3$ (значения параметров λ и μ существенны с точностью до пропорциональности!). Подставляя найденные значения $\lambda = 2$, $\mu = -3$ в уравнение (75), находим уравнение плоскости π : $x^1 + 6x^2 - x^3 - 5 = 0$.

Задача 13. Плоскость π задана параметрическими уравнениями

$$x^1 = 2 + 3t^1 - 4t^2, \quad x^2 = 1 - 3t^1 + 2t^2, \quad x^3 = -1 + t^1 - 2t^2. \quad (76)$$

Параметры t^1 и t^2 представляют собой координаты точек плоскости π в репере $\{M_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, где $M_0 = (2; 1; -1)$, $\mathbf{a}_1 = \{3; -3; 1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-4; 2; -2\}$. Найти:

1) координаты (x_A^1, x_A^2, x_A^3) точки A , если известны ее координаты $t_A^1 = 2, t_A^2 = 1$ в репере $\{M_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$;

2) координаты (t_B^1, t_B^2) точки $B(3; -4; -2) \in \pi$;

3) уравнения прямой ℓ в системе координат $\{x^1, x^2, x^3\}$, если известно ее уравнение $2t^1 + t^2 - 1 = 0$ во внутренней системе координат на π , определяемой репером $\{M_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$;

4) уравнения прямой ℓ , по которой плоскость π пересекается плоскостью $2x^1 - x^2 + x^3 - 5 = 0$, во внутренней системе координат на плоскости π , определяемой репером $\{M_0; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

Решение. 1) Подставляя значения $t_A^1 = 2, t_A^2 = 1$ в уравнения (76), находим координаты точки A : $x_A^1 = 4, x_A^2 = -3, x_A^3 = -1$.

2) Для нахождения координат t_B^1, t_B^2 точки B подставляем ее координаты $x_B^1 = 3, x_B^2 = -4, x_B^3 = -2$ в уравнения (76) и, решая возникающую систему трех уравнений с двумя неизвестными t^1 и t^2 , находим $t_B^1 = 3, t_B^2 = 2$.

3) Решая уравнение $2t^1 + t^2 - 1 = 0$, найдем параметрические уравнения $t^1 = u, t^2 = 1 - 2u$ прямой ℓ во внутренней системе координат. Подставляя эти уравнения в (76), находим $x^1 = -2 + 11u, x^2 = 3 - 7u, x^3 = -3 + 5u$.

4) Подставляя параметрические уравнения (76) в уравнение $2x^1 - x^2 + x^3 - 5 = 0$, получаем уравнение $2(2 + 3t^1 - 4t^2) - (1 - 3t^1 + 2t^2) + (-1 + t^1 - 2t^2) - 5 = 0 \iff 5t^1 - 6t^2 + 1 = 0$, решая которое, находим внутренние параметрические уравнения прямой ℓ : $t^1 = 1 + 6u, t^2 = 1 + 5u$.

Рекомендуемая литература: [1], Гл. I, §6; [2], Гл. XII.

Задачи и упражнения: [2], 1310, 1320, 1321, 1324, 1325, 1327, 1329, 1330, 1331, 1332, 1335, 1336, 1357, 1358, 1359, 1398, 1399, 1401, 1402, 1403, 1420, 1422, 1423.

5.4 Взаимное расположение прямых и плоскостей.

1. Взаимное расположение двух плоскостей. Пусть плоскости α и β заданы, соответственно, уравнениями: $A_i x^i + A_4 = 0$ и $B_i x^i + B_4 = 0$. Для исследования взаимного расположения этих плоскостей рассмотрим систему уравнений

$$A_i x^i + A_4 = 0, \quad B_i x^i + B_4 = 0 \quad (77)$$

и связанные с ней матрицы

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Исследование системы уравнений (77) дает следующий результат:

1. Если $\text{rank } S = 2$, то решение системы уравнений (77) имеет вид $x^i = x_0^i + t a^i$ и задает некоторую прямую ℓ . Таким образом, в этом случае плоскости α и β пересекаются по прямой ℓ .

2. Если $\text{rank } S = 1$, а $\text{rank } \tilde{S} = 2$, то направляющие подпространства плоскостей α и β совпадают. Поскольку система (77) несовместна, то общих точек у плоскостей α и β нет. Таким образом, в этом случае плоскости α и β параллельны.

3. Если $\text{rank } S = \text{rank } \tilde{S} = 1$, то уравнения системы (77) пропорциональны. В этом случае плоскости α и β совпадают.

2. Взаимное расположение трех плоскостей. Пусть плоскости α , β и γ заданы, соответственно, уравнениями: $A_i x^i + A_4 = 0$, $B_i x^i + B_4 = 0$ и $C_i x^i + C_4 = 0$. Для исследования взаимного расположения этих плоскостей рассмотрим систему уравнений

$$A_i x^i + A_4 = 0, \quad B_i x^i + B_4 = 0, \quad C_i x^i + C_4 = 0 \quad (78)$$

и связанные с ней матрицы

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

1. Если $\text{rank } S = 3$, то линейные формы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$, задающие направляющие подпространства плоскостей α , β и γ , линейно независимы. Система уравнений (78) имеет единственное решение. Плоскости α , β и γ имеют одну общую точку M_0 , координаты которой являются решением системы уравнений (78).

Поскольку линейные формы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ образуют базис сопряженного пространства \mathbf{V}_3^* , то произвольная плоскость $D_i x^i + D_4 = 0$, проходящая через точку M_0 , может быть задана уравнением

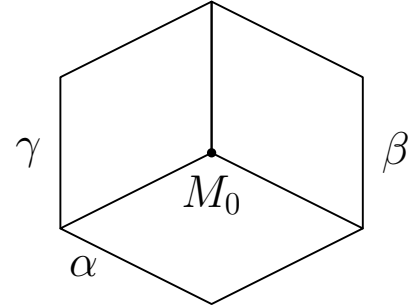


Рис. 23.

$$\lambda(A_i x^i + A_4) + \mu(B_i x^i + B_4) + \nu(C_i x^i + C_4) = 0. \quad (79)$$

Действительно, для нахождения коэффициентов λ , μ и ν нужно разложить линейную форму $\tilde{\mathbf{D}} = \{D_1, D_2, D_3\}$ по базису $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}\}$. Говорят, что уравнением (79) задается *связка* плоскостей или *2-параметрический пучок* (параметры λ , μ и ν существенны с точностью до пропорциональности, и в конкретных задачах один из них, как правило, можно положить равным 1).

2. Если $\text{rank } S = 2$, а $\text{rank } \tilde{S} = 3$, то система (78) несовместна и точек, принадлежащих всем трем плоскостям, нет. Аннулятор подпространства $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ имеет размерность 1. Таким образом, направляющие подпространства плоскостей α , β и γ имеют общее одномерное подпространство, а сами плоскости параллельны прямой, направляющий вектор которой принадлежит

указанному аннулятору. Две из линейных форм $\{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}\}$ могут оказаться пропорциональными — в этом случае две из трех плоскостей будут параллельны (см. рисунки 24, 25).

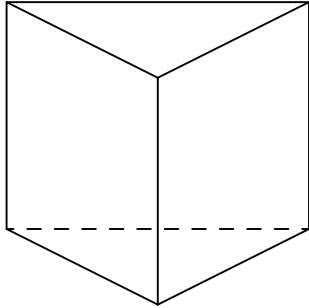


Рис. 24.

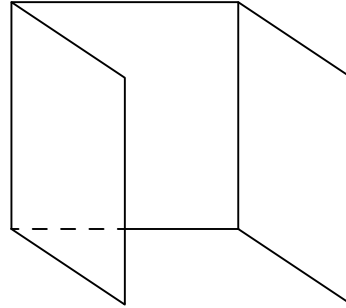


Рис. 25.

3. Если $\text{rank } S = \text{rank } \tilde{S} = 2$, то система (78) совместна, а ее решение имеет вид $x^i = x_0^i + ta^i$ и задает некоторую прямую ℓ . Таким образом, в этом случае плоскости α , β и γ принадлежат одному пучку (см. рисунок 26).

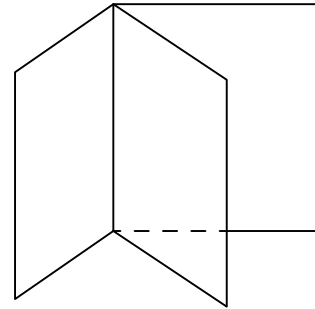


Рис. 26.

4. Если $\text{rank } S = 1$, а $\text{rank } \tilde{S} = 2$, то система (78) несовместна, а направляющие подпространства всех трех плоскостей совпадают. Плоскости параллельны, две из них могут совпадать (см. рисунок 27).

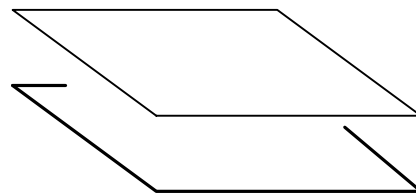
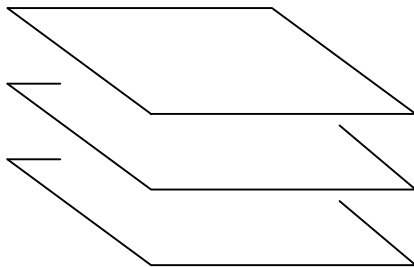


Рис. 27.

5. Если $\text{rank } S = \text{rank } \tilde{S} = 1$, то все три уравнения системы (78) пропорциональны одно другому. В этом случае плоскости

α , β и γ совпадают.

3. Взаимное расположение прямой и плоскости. Пусть заданы прямая ℓ , имеющая параметрические уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \iff x^i = x_0^i + ta^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (80)$$

и плоскость π с уравнением

$$A_i x^i + A_4 = 0. \quad (81)$$

Для выяснения того, что представляет собой множество общих точек прямой и плоскости $\ell \cap \pi$, подставим уравнения (80) в уравнение (81):

$$A_i(x_0^i + ta^i) + A_4 = 0 \iff (A_i a^i)t + A_i x_0^i + A_4 = 0. \quad (82)$$

Возможны следующие случаи:

1. $A_i a^i \neq 0 \iff \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{a} \rangle \neq 0$. В этом случае направляющие подпространства прямой и плоскости не имеют общих ненулевых векторов. Уравнение (82) имеет единственное решение, а именно: $t = t_1 = -(A_i x_0^i + A_4)/(A_i a^i)$. Прямая и плоскость имеют одну общую точку $M_1(t_1)$ (см. рисунок 28).

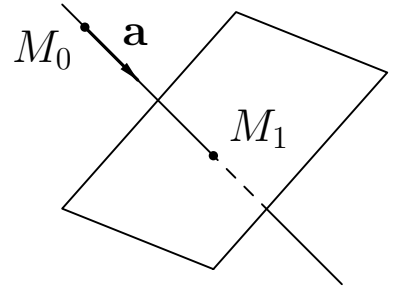


Рис. 28.

2. $A_i a^i = 0, (A_i x_0^i + A_4) \neq 0$. Общих точек у прямой и плоскости нет, а направляющее подпространство прямой $\mathbf{V}_1(\ell) = \mathcal{L}(\mathbf{a})$ содержится в направляющем подпространстве плоскости $\mathbf{V}_2(\pi) = \text{Ann}(\tilde{\mathbf{A}})$. Прямая и плоскость параллельны (см. рисунок 29).

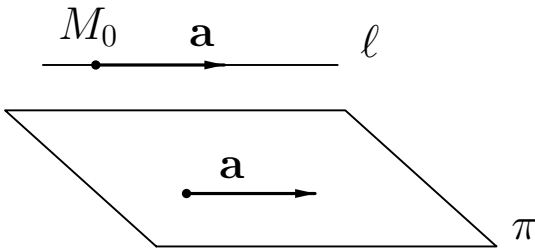


Рис. 29.

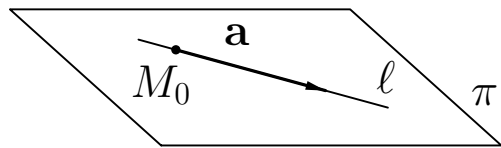


Рис. 30.

3. $A_i a^i = 0$, $A_i x_0^i + A_4 = 0$. В этом случае $\mathbf{V}_1(\ell) \subset \mathbf{V}_2(\pi)$, $M_0(x_0^i) \in \pi$, и прямая ℓ лежит в плоскости π (см. рисунок 30).

4. Взаимное расположение двух прямых. Пусть две прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы, соответственно, уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t^2 \mathbf{a}_2.$$

Общие точки прямых ℓ_1 и ℓ_2 удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 + t^2 \mathbf{a}_2 \iff t^1 \mathbf{a}_1 - t^2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = 0$$

или, в координатах, системе уравнений

$$a_1^i t^1 - a_2^i t^2 + x_1^i - x_2^i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (83)$$

Возможны следующие случаи:

1. Векторы \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ линейно не независимы. В этом случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 *скрещиваются*. Они расположены в параллельных плоскостях $\pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \lambda^2 \mathbf{a}_2$ и $\pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \lambda^2 \mathbf{a}_2$. Система уравнений (83) несовместна (см. рисунок 31.)

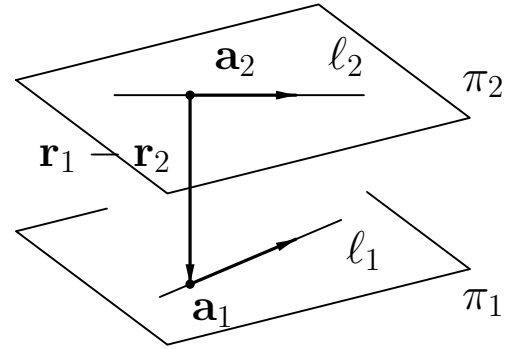


Рис. 31.

2. $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 2$, $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. В этом случае система уравнений (83) имеет единственное решение. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке и лежат в плоскости $\pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \lambda^2 \mathbf{a}_2$ (см. рисунок 32.)

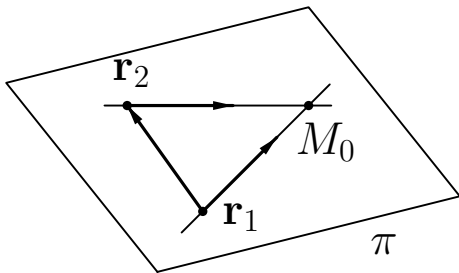


Рис. 32.

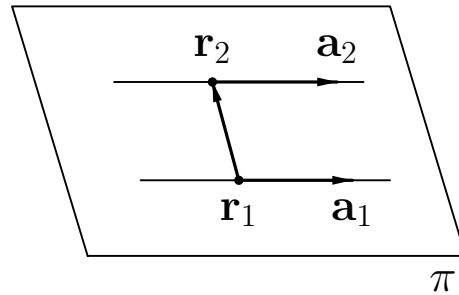


Рис. 33.

3. $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 2$, $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \notin \mathcal{L}(\mathbf{a}_1)$. Система уравнений (83) несовместна. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны в строгом смысле слова. Они расположены в плоскости $\pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \lambda^2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ (см. рисунок 33.)

4. $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 1$, $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{a}_1)$. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 совпадают. Решение системы уравнений (83) представляет собой замену системы координат на прямой: $t^2 = At^1 + B$.

Следствия.

1) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \leq 2 \iff$

$$\begin{vmatrix} x_1^1 - x_2^1 & x_1^2 - x_2^2 & x_1^3 - x_2^3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (49)$$

2) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке в том и только том случае, когда выполняется соотношение (49) и $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$.

3) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны в строгом смысле слова в том и только том случае, когда $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2 \nparallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

5.5 Примеры.

Задача 14. Установить взаимное расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2 , заданных следующими уравнениями:

1) $\ell_1: x^1 = 1 + 2t, x^2 = 2 + t, x^3 = -3 + t$; $\ell_2: x^1 = 5 + 2t, x^2 = 6 + 3t, x^3 = -1 + t$.

2) $\ell_1: x^1 = 1 + 2t, x^2 = 2 + t, x^3 = -3 + t$; $\ell_2: x^1 - x^2 - x^3 - 2 = 0, x^1 + 2x^2 - 4x^3 - 17 = 0$.

3) $\ell_1: x^1 - x^2 - x^3 - 2 = 0, x^1 + 2x^2 - 4x^3 - 17 = 0$; $\ell_2: x^1 - x^2 - x^3 - 3 = 0, x^1 + 3x^2 - 3x^3 + 5 = 0$.

Решение. 1) Составляем систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Решая эту систему, находим единственное решение $M(3; 3; -2)$. Таким образом, $\ell_1 \cap \ell_2 = M$. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в плоскости

$$\begin{vmatrix} x^1 - 1 & x^2 - 2 & x^3 + 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x^1 - 2x^3 - 7 = 0.$$

2) Подставляя параметрические уравнения прямой ℓ_1 в систему уравнений, задающих ℓ_2 , получаем систему уравнений относительно t : $1 + 2t - (2 + t) - (-3 + t) - 2 = 0$, $1 + 2t + 2(2 + t) - 4(-3 + t) - 17 = 0$, которая представляет собой тождество $0 = 0$. Следовательно, любая точка прямой ℓ_1 удовлетворяет системе уравнений прямой ℓ_2 , поэтому прямые ℓ_1 и ℓ_2 совпадают.

3) Система всех четырех уравнений несовместна: ранг основной матрицы системы равен 3, а ранг расширенной матрицы системы равен 4. Поскольку ранг основной матрицы системы равен 3, направляющие подпространства прямых не совпадают. Прямые скрещиваются.

Задача 15. Через точку $A(4; 0; -1)$ провести прямую ℓ так, чтобы она пересекла каждую из прямых ℓ_1 : $x^1 = 1 + 2t$, $x^2 = -3 + 4t$, $x^3 = 5 + 3t$ и ℓ_2 : $x^1 = 5t$, $x^2 = 2 - t$, $x^3 = -1 + 2t$.

Решение. Искомая прямая является линией пересечения плоскости π_1 , проходящей через точку A и прямую ℓ_1 , с плоскостью π_2 , проходящей через точку A и прямую ℓ_2 . Плоскости π_1 и π_2

имеют, соответственно, следующие уравнения:

$$\begin{vmatrix} x^1 - 1 & x^2 + 3 & x^3 - 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x^1 & x^2 - 2 & x^3 + 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая получающуюся систему уравнений, находим параметрические уравнения прямой ℓ : $x^1 = 4 + 13t$, $x^2 = 37t$, $x^3 = 1 + 58t$.

Рекомендуемая литература: [1], Гл. I, §6; [2], Гл. XII.

Задачи и упражнения: [2], 1355, 1371, 1407, 1408, 1409, 1411, 1412, 1413, 1416, 1418; [13], 822, 826.

6 Пространство \mathbf{E}_n^* , сопряженное евклидову векторному пространству \mathbf{E}_n .

Основная форма g евклидова пространства \mathbf{E}_n задает линейное отображение

$$\varphi_g : \mathbf{E}_n \ni \mathbf{a} \mapsto \tilde{\mathbf{a}} \in \mathbf{E}_n^*, \quad (84)$$

определяемое формулой

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (85)$$

где \mathbf{b} — произвольный вектор из \mathbf{E}_n .

В координатах, определяемых некоторым (произвольным) базисом $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства \mathbf{E}_n , соотношение (85) принимает вид

$$a_i b^i = g_{ki} a^k b^i, \quad (86)$$

где $\{a_i\}$ — координаты линейной формы $\tilde{\mathbf{a}}$, а $\{a^i\}$ — координаты вектора \mathbf{a} . Из (86) следует, что координаты вектора \mathbf{a} и линейной формы $\tilde{\mathbf{a}}$ связаны соотношением

$$a_i = g_{ki} a^k. \quad (87)$$

Поскольку матрица (g_{ki}) невырождена, то линейное отображение (84) имеет нулевое ядро и является изоморфизмом векторных пространств. Этот изоморфизм называется *каноническим изоморфизмом* пространств \mathbf{E}_n и \mathbf{E}_n^* .

Пусть (g^{ki}) — матрица, обратная к (g_{ki}) . Матрица (g^{ki}) симметричная, и выполняется следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & \dots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \dots & g^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & g^{n2} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff g^{ki} g_{ij} = \delta_j^k. \quad (88)$$

Используя формулу (88), легко получить следующее координатное представление

$$a^m = g^{mi} a_i \quad (89)$$

для обратного изоморфизма

$$\varphi_g^{-1} : \mathbf{E}_n^* \ni \tilde{\mathbf{a}} \mapsto \mathbf{a} \in \mathbf{E}_n. \quad (90)$$

Действительно, из (87) и (88) получаем: $g^{mi} a_i = g^{mi} g_{ki} a^k = \delta_k^m a^k = a^m$.

Изоморфизм (84) позволяет перенести скалярное произведение с пространства \mathbf{E}_n на \mathbf{E}_n^* . Таким образом, на пространстве \mathbf{E}_n^* естественным образом возникает скалярное произведение, определяемое формулой

$$(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \text{где} \quad \mathbf{a} = \varphi_g^{-1}(\tilde{\mathbf{a}}), \quad \mathbf{b} = \varphi_g^{-1}(\tilde{\mathbf{b}}). \quad (91)$$

Соотношением (91) на пространстве \mathbf{E}_n^* задается симметричная билинейная форма

$$\tilde{g} : \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{E}_n^* \ni \{\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}\} \mapsto (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) \in \mathbf{R}. \quad (92)$$

Найдем матрицу (\tilde{g}^{mk}) билинейной формы (92) в базисе $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$, сопряженном базису $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства \mathbf{E}_n . Пусть $\mathbf{a} = \varphi_g^{-1}(\tilde{\mathbf{a}})$, $\mathbf{b} = \varphi_g^{-1}(\tilde{\mathbf{b}})$. Тогда $(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и, следовательно,

$$\tilde{g}^{ij} a_i b_j = g_{ij} a^i b^j = g_{ij} g^{im} a_m g^{jk} b_k = \delta_j^m g^{jk} a_m b_k = g^{mk} a_m b_k = g^{ij} a_i b_j.$$

Таким образом,

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij}. \quad (93)$$

При изоморфизме (90) базис $\{\tilde{\mathbf{e}}^i\}$ пространства \mathbf{E}_n^* , сопряженный базису $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства \mathbf{E}_n , переходит в некоторый базис $\{\mathbf{e}^i\}$ пространства \mathbf{E}_n . Базис $\{\mathbf{e}^i\}$ также называется базисом *сопряженным* (*взаимным*, *двойственным*, *дуальным*) базису $\{\mathbf{e}_i\}$. При $n = 3$ он совпадает с базисом $\{\mathbf{e}_i^*\}$ (см. (39), с. 38), рассматривавшемся в §2.

Задача 16. Показать, что векторы $\mathbf{e}^i = \varphi_g^{-1}(\tilde{\mathbf{e}}^i)$ и \mathbf{e}_i связаны следующими соотношениями:

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta_j^i, \quad \mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j. \quad (94)$$

Решение. Первое из соотношений (94) доказывается следующим образом:

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \tilde{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i.$$

Для доказательства второго и третьего соотношений запишем формулы перехода от одного из базисов к другому

$$\mathbf{e}_i = p_{ik} \mathbf{e}^k, \quad \mathbf{e}^i = p^{ik} \mathbf{e}_k. \quad (95)$$

Умножая первое из соотношений (95) скалярно на вектор \mathbf{e}_j , а второе на \mathbf{e}^j , и учитывая уже доказанное первое из соотношений (94), а также соотношение (93), получим, соответственно, $g_{ij} = p_{ik}(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j) = p_{ik} \delta_j^k = p_{ij}$ и $g^{ij} = p^{ik}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j) = p^{ik} \delta_k^j = p^{ij}$.

Принято отождествлять пространства \mathbf{E}_n и \mathbf{E}_n^* посредством изоморфизма (84). При этом $\mathbf{a} \equiv \tilde{\mathbf{a}} = g(\mathbf{a})$, $\mathbf{e}^i \equiv \tilde{\mathbf{e}}^i$. У каждого вектора \mathbf{a} оказывается два набора координат: $\{a^i\}$ и $\{a_i\}$.

Переходы (87) и (89) от координат одного типа к координатам другого типа называются соответственно *опусканием* и *поднятием* индекса.

Если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ ортонормированный, то $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}$, и формула (87) принимает вид $a_i = a^i$. В этом случае сопряженный базис $\{\mathbf{e}^i\}$ совпадает с исходным базисом $\{\mathbf{e}_i\}$.

Определение. Пусть $\mathbf{L}_m \subset \mathbf{E}_n$ — подпространство. Подмножество

$$\mathbf{L}_m^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0 \ \forall \mathbf{b} \in \mathbf{L}_m\}, \quad (96)$$

состоящее из векторов, ортогональных всем векторам из \mathbf{L}_m , называется ортогональным дополнением подпространства \mathbf{L}_m .

Из билинейности основной формы g пространства \mathbf{E}_n следует, что \mathbf{L}_m^\perp — подпространство в \mathbf{E}_n . Действительно, если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}_m^\perp$, то для любого $\mathbf{b} \in \mathbf{L}_m$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ выполняется $(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{y}, \mathbf{b}) = 0$, поэтому $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathbf{L}_m^\perp$. При изоморфизме (84) подпространство \mathbf{L}_m^\perp переходит в $\text{Ann}(\mathbf{L}_m)$. Действительно, условие $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0$ в (96) равносильно условию $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{b}) = 0$ для $\tilde{\mathbf{x}} = \varphi_g(\mathbf{x})$, поэтому $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_m^\perp$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathbf{x}} \in \text{Ann}(\mathbf{L}_m)$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim \mathbf{L}_m^\perp = n - m$ и что, выбрав базис $\{\mathbf{c}_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n - m$, в \mathbf{L}_m^\perp , подпространство \mathbf{L}_m в \mathbf{E}_n можно задать следующим образом:

$$\mathbf{L}_m = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha) = 0, \ \alpha = 1, \dots, n - m\}. \quad (97)$$

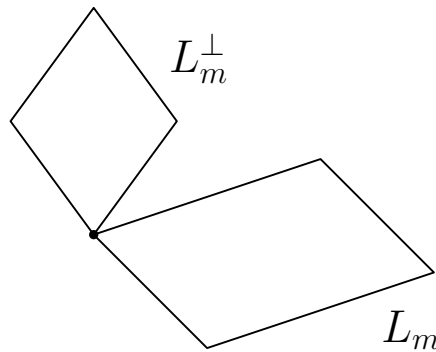


Рис. 34.

Отметим также, что поскольку $\mathbf{L}_m^\perp \cap \mathbf{L}_m = \mathbf{0}$ (иначе найдется ненулевой вектор \mathbf{x} такой, что $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$), то

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{L}_m \oplus \mathbf{L}_m^\perp.$$

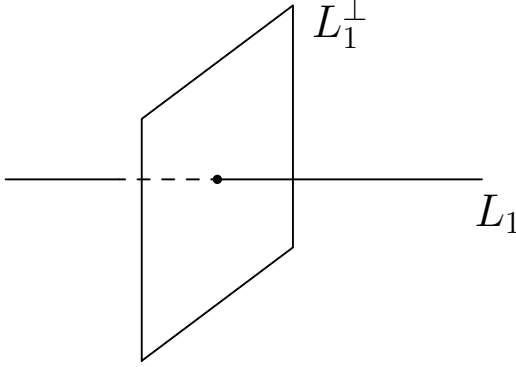


Рис. 35.

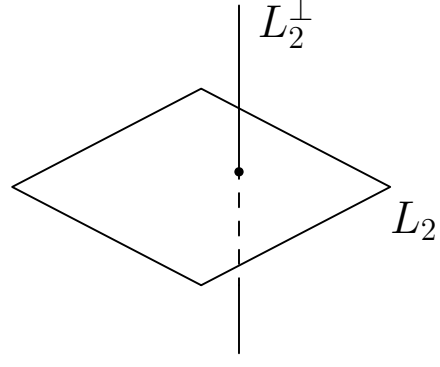


Рис. 36.

В случае трехмерного евклидова пространства \mathbf{E}_3 одномерное подпространство \mathbf{L}_1 имеет двумерное ортогональное дополнение \mathbf{L}_1^\perp , а двумерное подпространство \mathbf{L}_2 имеет одномерное ортогональное дополнение \mathbf{L}_2^\perp (см. рисунки 35 и 36).

6.1 Примеры.

Задача 17. В евклидовом пространстве \mathbf{R}^4 задано подпространство \mathbf{L} системой уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 - x^4 = 0 \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \quad (98)$$

1) Найти базис в \mathbf{L} ; 2) найти базис в \mathbf{L}^\perp ; 3) задать \mathbf{L}^\perp системой линейных уравнений.

Решение. Систему уравнений (98) можно представить в виде

$$(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1) = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{c}_2) = 0,$$

где $\mathbf{c}_1 = \{1; 2; -1; -1\}$, $\mathbf{c}_2 = \{2; 5; -1; 1\}$. Векторы \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 линейно независимы и (в соответствии с (97)) составляют базис в \mathbf{L}^\perp . Таким образом, $\dim \mathbf{L}^\perp = 2$, а $\dim \mathbf{L} = 4 - \dim \mathbf{L}^\perp = 2$.

Базис в \mathbf{L} — это фундаментальная система решений системы (98): $\mathbf{b}_1 = \{3; -1; 1; 0\}$, $\mathbf{b}_2 = \{7; -3; 0; 1\}$.

Подпространство \mathbf{L}^\perp состоит из векторов, ортогональных векторам \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , поэтому оно может быть задано системой линейных уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{b}_1) = 0 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{b}_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ 7x^1 - 3x^2 + x^4 = 0. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература: [9], Лекция 4.

Задачи и упражнения: [11], 1366, 1367.

7 Плоскость и прямая в трехмерном евклидовом пространстве.

7.1 Уравнения плоскости в \mathcal{E}_3 .

В евклидовом пространстве \mathcal{E}_3 направляющее подпространство $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2(\pi)$ плоскости π однозначно определяется своим ортогональным дополнением — одномерным подпространством \mathbf{V}_2^\perp . Всякий ненулевой вектор $\mathbf{N} \in \mathbf{V}_2^\perp$ называется *нормальным вектором* плоскости π . Нормальный вектор \mathbf{N} образует базис в \mathbf{V}_2^\perp , и направляющее подпространство $\mathbf{V}_2(\pi)$ плоскости π может быть задано следующим образом:

$$\mathbf{V}_2(\pi) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid (\mathbf{x}, \mathbf{N}) = 0\}. \quad (99)$$

Уравнение плоскости π с нормальным вектором \mathbf{N} , проходящей через точку M_0 . Пусть \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки M_0 , а \mathbf{r} — радиус-вектор некоторой произвольной точки $M \in \mathcal{E}_3$ по отношению к (аффинному) реперу $\{O; \mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда из (99) следует, что

$$M \in \pi \iff \overrightarrow{M_0 M} \in \mathbf{V}_2(\pi) \iff (\overrightarrow{M_0 M}, \mathbf{N}) = 0 \iff$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0. \quad (100)$$

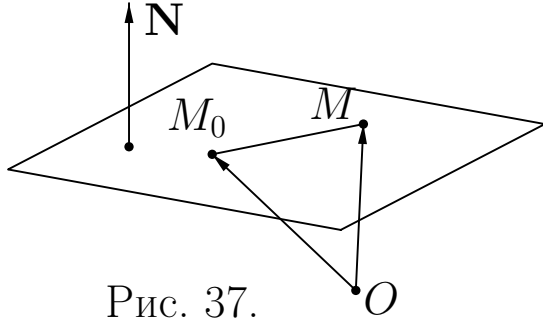


Рис. 37.

В координатах уравнение (100) принимает вид

$$g_{ij}(x^i - x_0^i)N^j = 0. \quad (101)$$

Если $\{O; \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}\}$ — ортонормированный репер, то

$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, и при исполь-

зовании обозначений $\mathbf{N}\{A, B, C\}$, $M(x, y, z)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ уравнение (101) принимает вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \iff$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (102)$$

Как следствие, получаем следующее утверждение.

Предложение. Для плоскости π , имеющей уравнение (102) в ортонормированном репере, вектор $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ является нормальным вектором.

Уравнение (100) можно также переписать в виде

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}) + D = 0, \quad (103)$$

где $D = -(\mathbf{r}_0, \mathbf{N})$. Из (102) следует, что всякое уравнение (103) является уравнением плоскости в \mathcal{E}_3 .

Решая уравнение $(\mathbf{x}, \mathbf{N}) = 0$, находим два линейно независимых вектора $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ — базис направляющего подпространства $\mathbf{V}_2(\pi)$, после чего можно записать параметрические уравнения плоскости π с нормальным вектором \mathbf{N} , проходящей через точку M_0 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1 \mathbf{a}_1 + t^2 \mathbf{a}_2. \quad (104)$$

Обратно, если известны параметрические уравнения (104) плоскости π , то нормальный вектор \mathbf{N} этой плоскости можно

найти как решение системы уравнений $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) = 0$. Нормальным вектором плоскости (104) является также вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$, поэтому уравнение плоскости π с направляющим подпространством $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, проходящей через точку M_0 , может быть записано в одном из следующих видов:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \iff (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0.$$

7.2 Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость.

Если известен нормальный вектор \mathbf{N} плоскости π , то уравнение перпендикуляра ℓ , опущенного из точки M_1 на π , имеет следующий вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{N}.$$

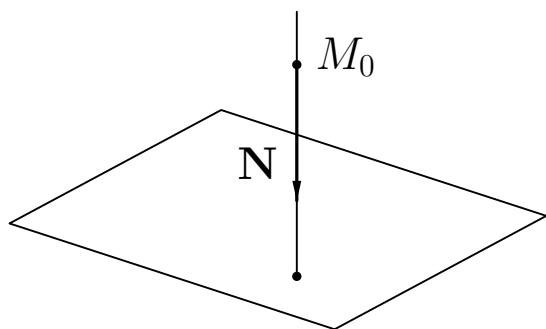


Рис. 38.

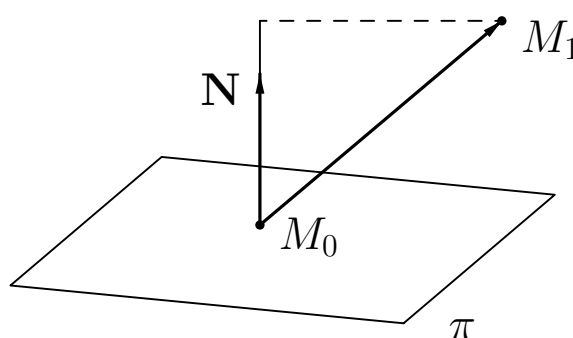


Рис. 39.

7.3 Расстояние от точки до плоскости.

Пусть плоскость π имеет нормальный вектор \mathbf{N} и проходит через точку M_0 . Расстояние $\text{dist}(M_1, \pi)$ от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π находится как абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на ось с направляющим вектором \mathbf{N} (см. рисунок 39):

$$\text{dist}(M_1, \pi) = |\text{pr}_{\mathbf{N}}(\overrightarrow{M_0M_1})| = \frac{|(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}. \quad (105)$$

Если плоскость π задана уравнением (102), то формула (105) принимает вид

$$\text{dist}(M_1, \pi) = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Поскольку $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, и в прямоугольных координатах расстояние от точки M_0 до плоскости π находится по формуле

$$\text{dist}(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В аффинной системе координат, определяемой аффинным репером в пространстве \mathcal{E}_3 , формула (105) принимает вид

$$\text{dist}(M_1, \pi) = \frac{|g_{ij}(x_1^i - x_0^i)N^j|}{\sqrt{g_{km}N^kN^m}}. \quad (106)$$

Задача 18. Пусть в аффинной системе координат плоскость π задана уравнением $A_i x^i + A_4 = 0$. Показать, что уравнение (106) можно представить в виде

$$\text{dist}(M_1, \pi) = \frac{|A_i x_1^i + A_4|}{\sqrt{g^{km}A_k A_m}}.$$

Если направляющее подпространство плоскости π задано как линейная оболочка $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, то расстояние $\text{dist}(M_1, \pi)$ можно также найти как высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (основание) и $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$:

$$\text{dist}(M_1, \pi) = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

7.4 Угол между двумя плоскостями.

Угол $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ между плоскостями π_1 и π_2 равен углу между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , перпендикулярными соответственно плоско-

стям π_1 и π_2 . Он может быть найден по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)|}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|},$$

где \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 — нормальные векторы плоскостей π_1 и π_2 соответственно.

7.5 Прямая в \mathcal{E}_3 .

Рассмотрим прямую ℓ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ в пространстве \mathcal{E}_3 . Направляющее подпространство $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1(\ell)$ этой прямой одномерно, поэтому ортогональное дополнение $\mathbf{V}_1^\perp = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0\}$ имеет размерность 2. Пусть $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ — базис в \mathbf{V}_1^\perp , тогда условие $M(\mathbf{r}) \in \ell$ эквивалентно тому, что $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ и может быть записано в виде

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}_1) = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}_2) = 0. \quad (107)$$

Уравнениями (107) задаются две плоскости π_1 и π_2 с нормальными векторами \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 соответственно, и прямая ℓ представляет собой пересечение $\pi_1 \cap \pi_2$ этих плоскостей.

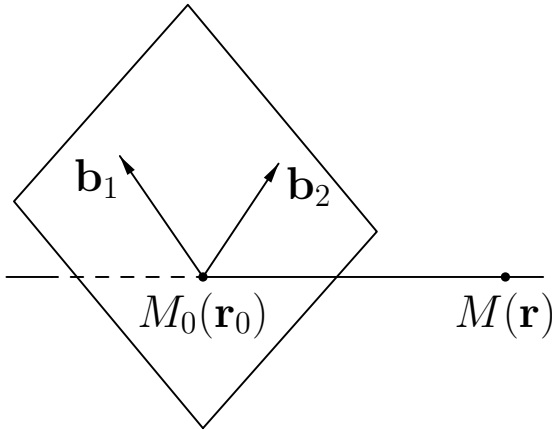


Рис. 40.

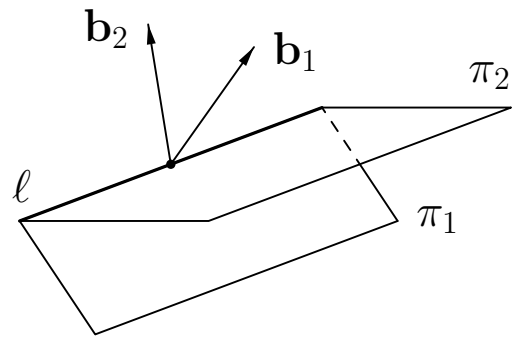


Рис. 41.

В случае, если прямая ℓ в \mathcal{E}_3 задана системой уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1 = 0 \\ (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2 = 0, \end{cases} \quad (108)$$

ее направляющий вектор \mathbf{a} может быть найден как векторное произведение $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$.

7.6 Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую.

1. Прямая задана параметрическим уравнением. Для нахождения уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую ℓ , заданную параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$, составим сначала уравнение плоскости π , проходящей через M_1 и перпендикулярной ℓ : $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = 0$. Затем, подставляя уравнение прямой ℓ в уравнение плоскости π , найдем точку $M_2 = \pi \cap \ell$. Имеем: $(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = 0 \iff (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) + t\mathbf{a}^2 = 0$. Отсюда

$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{\mathbf{a}^2} \iff \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{\mathbf{a}^2} \mathbf{a}.$$

Прямая M_1M_2 , перпендикулярная ℓ , имеет уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Расстояние $\text{dist}(M_1, \ell)$ от точки M_1 до прямой ℓ можно вычислить по формуле

$$\text{dist}(M_1, \ell) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|.$$

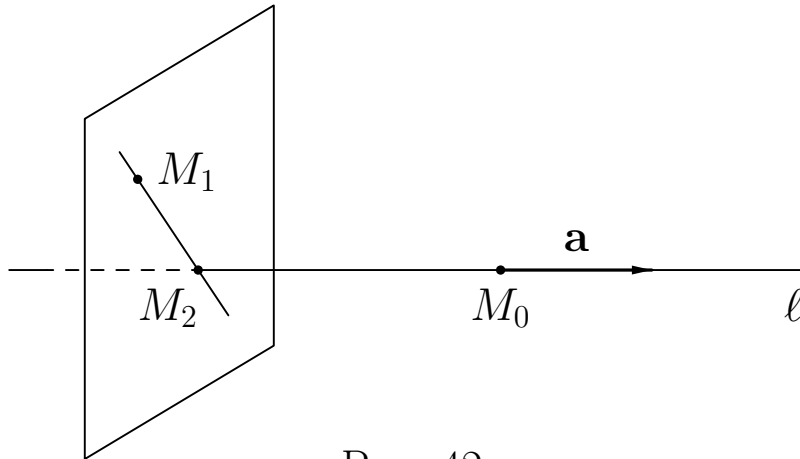


Рис. 42.

2. Прямая задана как линия пересечения плоскостей. В случае, если прямая ℓ задана системой уравнений (108), ее направляющий вектор имеет вид $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, поэтому уравнение плоскости π , проходящей через M_1 и перпендикулярной ℓ , имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]) = 0. \quad (109)$$

Решая систему из трех уравнений (108) и (109), найдем точку $M_2 = \pi \cap \ell$.

7.7 Нормальное уравнение прямой и расстояние от точки до прямой.

Условие принадлежности точки $M(\mathbf{r})$ прямой $\ell : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ в \mathcal{E}_3 можно записать в виде $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$. Если в качестве направляющего вектора прямой ℓ взят единичный вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{V}(\ell)$ (например, вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$), то уравнение

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}] = 0 \iff [\mathbf{r}, \mathbf{n}] - \mathbf{N} = 0 \quad (110)$$

называют *нормальным уравнением* прямой ℓ . Вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{n}]$ в уравнении (110) называется *вектором момента* прямой ℓ относительно начала координат O (см. рисунок 43).

Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки M_1 до прямой ℓ , заданной уравнением (110), равно высоте параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{n} и $\overrightarrow{M_0M_1}$ (см. рисунок 44):

$$\text{dist}(M_1, \ell) = |[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}]| = |[\mathbf{r}_1, \mathbf{n}] - \mathbf{N}|.$$

Если прямая ℓ задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$, то расстояние от M_1 до ℓ вычисляется по формуле

$$\text{dist}(M_1, \ell) = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}.$$

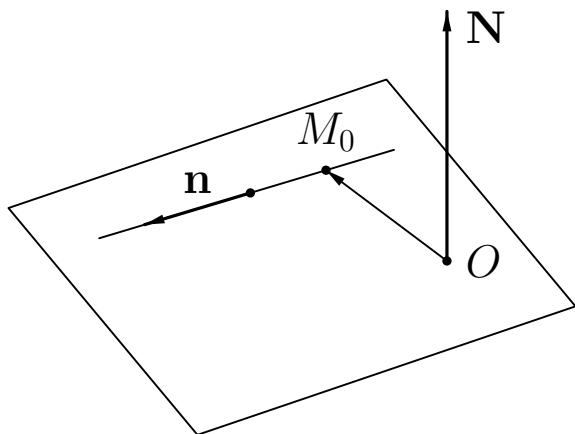


Рис. 43.

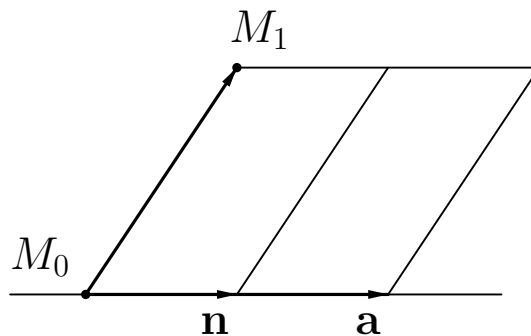


Рис. 44.

7.8 Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых.

Две скрещивающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 , заданные, соответственно, уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t^2 \mathbf{a}_2$, лежат в параллельных плоскостях (см. §5, рисунок 31 на с. 69) $\pi_1 : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$ и $\pi_2 : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$. Общим нормальным вектором этих плоскостей является вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Рассмотрим, кроме того, пару плоскостей ω_1 и ω_2 , определенных условиями:

$$\omega_1 \supset \ell_1, \quad \omega_1 \perp \pi_1, \pi_2; \quad \omega_2 \supset \ell_2, \quad \omega_2 \perp \pi_1, \pi_2.$$

Плоскости ω_1 и ω_2 имеют уравнения $\omega_1 : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{N}) = 0$ и $\omega_2 : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{N}) = 0$. Их пересечение $\ell = \omega_1 \cap \omega_2$ — общий перпендикуляр прямых ℓ_1 и ℓ_2 . Этот общий перпендикуляр задается системой уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{N}) = 0, \\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{N}) = 0. \end{cases}$$

Пусть $K_1 = \ell \cap \ell_1$ и $K_2 = \ell \cap \ell_2$, тогда

$$|\overrightarrow{K_1 K_2}| = \inf_{P_1 \in \ell_1, P_2 \in \ell_2} |\overrightarrow{P_1 P_2}|. \quad (111)$$

Число (111) называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2 . Это расстояние $\text{dist}(\ell_1, \ell_2)$ совпадает с

расстоянием между параллельными плоскостями π_1 и π_2 и может быть вычислено как расстояние от точки $M_2(\mathbf{r}_2)$ до плоскости π_1 :

$$\text{dist}(\ell_1, \ell_2) = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}. \quad (112)$$

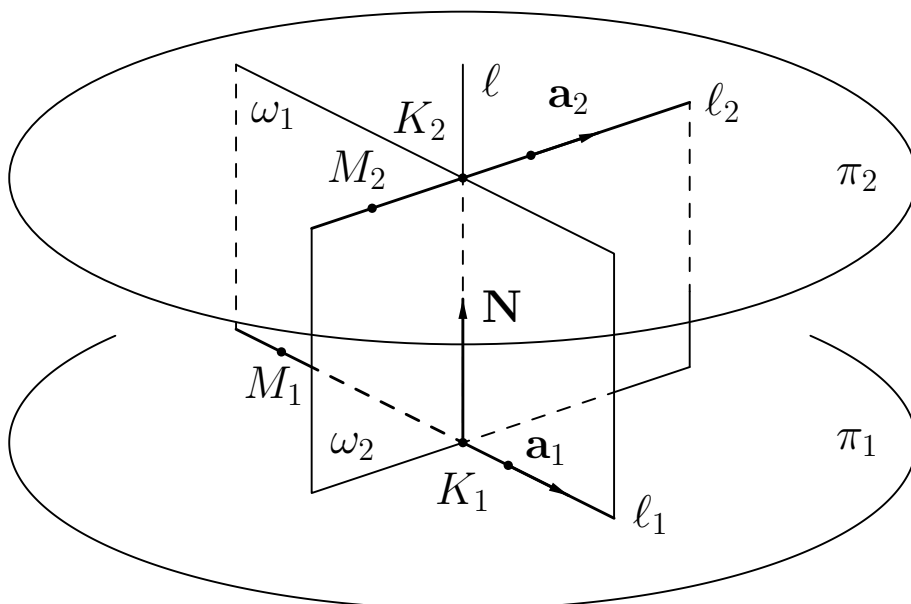


Рис. 45.

Число, определяемое формулой (112), может также быть интерпретировано как высота параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 (основание) и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

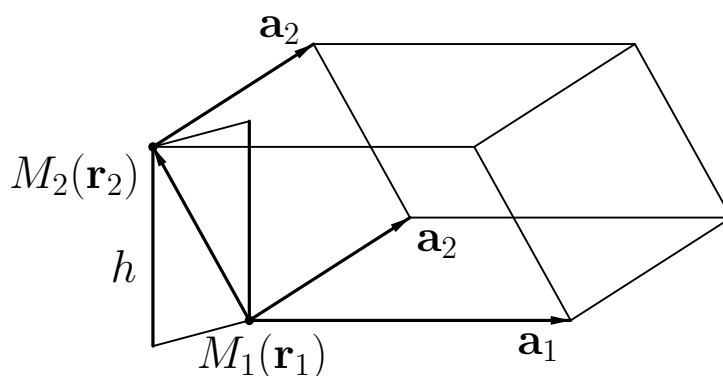


Рис. 46.

7.9 Углы между двумя прямыми и между прямой и плоскостью.

Угол $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , заданными, соответственно, уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t^2 \mathbf{a}_2$, находится по следующей формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}.$$

Угол $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ между прямой ℓ , заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t^1 \mathbf{a}_1$, и плоскостью π заданной уравнением $(\mathbf{r}, \mathbf{N}) + D = 0$, дополняет до $\frac{\pi}{2}$ угол между прямой ℓ и перпендикуляром к плоскости π (см. рисунок 47), поэтому

$$\sin \psi = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{a}||\mathbf{N}|}.$$

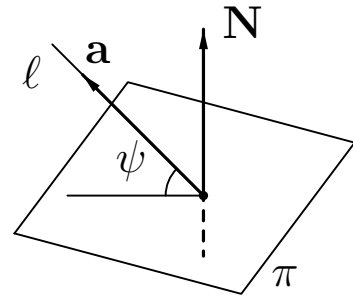


Рис. 47.

7.10 Примеры.

Задача 19. Опустить перпендикуляр из точки $M(1; 3; 5)$ на прямую ℓ :

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases} \quad (113)$$

Решение. Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой ℓ и проходящей через точку $M(1; 3; 5)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z - 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y - z + 7 = 0. \quad (114)$$

Решая совместно систему из трех уравнений (113) и (114), находим основание искомого перпендикуляра $K(-2; 1; 4)$, а затем и уравнение самого перпендикуляра: $x = 1 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = 5 + t$.

Задача 20. Опустить перпендикуляр из точки $M(-1; 0; 4)$ на прямую ℓ : $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - t$.

Решение. Уравнение плоскости π , проходящей через точку M перпендикулярно ℓ , имеет вид $(x + 1) + 2(y - 0) - (z - 4) = 0$. Подставив в него уравнения прямой ℓ , найдем точку K пересечения ℓ и π — основание искомого перпендикуляра. Имеем: $2 + t + 4t + t = 0$, откуда $t = -\frac{1}{3}$ и, следовательно, точка K имеет координаты $(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{13}{3})$. Направляющим вектором перпендикуляра служит вектор $\overrightarrow{MK} \{ \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \}$, и поэтому этот перпендикуляр может быть задан следующими уравнениями: $x = -1 + 5t$, $y = -2t$, $z = 4 + t$.

Задача 21. Составить уравнения сферы, вписанной в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью π : $11x - 10y - 2z - 57 = 0$.

Решение. Центр сферы $C(x_C, y_C, z_C)$ равноудален от всех координатных плоскостей, поэтому $|x_C| = |y_C| = |z_C|$. Плоскость π пересекает координатные оси в точках $K_1(\frac{57}{11}; 0; 0)$, $K_2(0; -\frac{57}{10}; 0)$, $K_3(0; 0; -\frac{57}{2})$, поэтому $x_C = t$, $y_C = -t$, $z_C = -t$ ($t > 0$).

Приравнявая расстояние от точки C до плоскости π к расстоянию от C до плоскости Oxy , получаем уравнение

$$\frac{|11t + 10t + 2t - 57|}{\sqrt{11^2 + 10^2 + 2^2}} = t. \quad (115)$$

Так как начало координат и точка C лежат по одну сторону от π , то $11t + 10t + 2t - 57 < 0$, и уравнение (115) принимает вид $-23t + 57 = 15t$, откуда $t = \frac{3}{2}$. Искомая

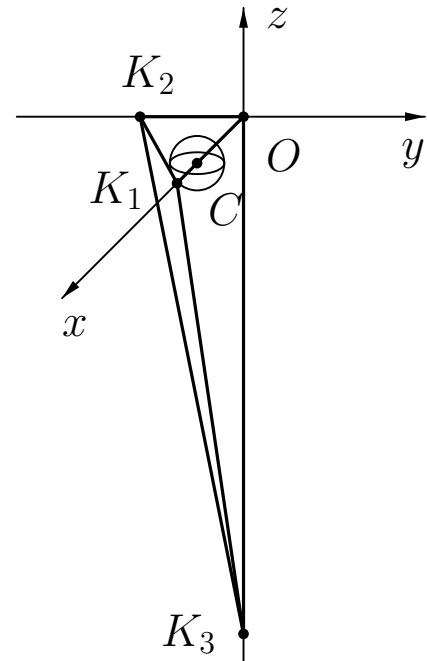


Рис. 48.

сфера имеет уравнение

$$(x - 3/2)^2 + (y + 3/2)^2 + (z + 3/2)^2 = 9/4.$$

Задача 22. Составить уравнение круглого цилиндра Φ радиуса R , осью которого является прямая ℓ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$.

Решение. Точка $M(\mathbf{r})$ лежит на цилиндре Φ в том и только том случае, когда $\text{dist}(M, \ell) = R$. Отсюда получаем следующее уравнение цилиндра Φ :

$$\frac{|[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|} = R \iff [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]^2 = R^2 \mathbf{a}^2.$$

Предполагая, что единичный направляющий вектор прямой ℓ имеет координаты $\{l, m, n\}$ ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), получим следующее координатное уравнение цилиндра Φ :

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} y - y_0 & z - z_0 \\ m & n \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z - z_0 & x - x_0 \\ n & l \end{array} \right|^2 - R^2 = 0.$$

Задача 23. Составить уравнение круглого конуса Φ с вершиной в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ и осью ℓ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$, образующая которого составляет с осью угол φ .

Решение. Точка $M(\mathbf{r})$ лежит на конусе Φ в том и только том случае, когда косинус угла между векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и \mathbf{a} равен $\pm \cos \varphi$. Отсюда получаем уравнение конуса

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})^2}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \mathbf{a}^2} = \cos^2 \varphi.$$

Предполагая, что единичный направляющий вектор прямой ℓ имеет координаты $\{l, m, n\}$ ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), получим следующее координатное уравнение конуса Φ :

$$\begin{aligned} (l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0))^2 = \\ = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2) \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Задача 24. Найти проекцию ℓ' прямой ℓ : $x + 3 + 5t$, $y = -1 + t$, $z = 4 + t$ на плоскость π : $2x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Решение. Плоскость ω , содержащая прямую ℓ и перпендикулярная плоскости π , имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 5x - 13y - 12z + 20 = 0,$$

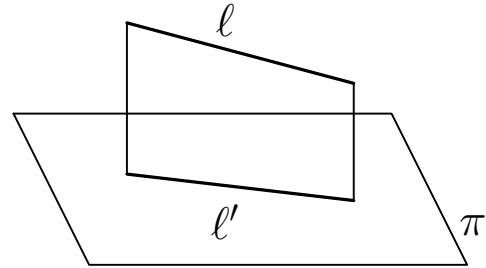


Рис. 49.

поэтому проекция $\ell' = \pi \cap \omega$ определяется системой уравнений $2x - 2y + 3z - 5 = 0$, $5x - 13y - 12z + 20 = 0$.

Задача 25. Два противоположных ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ расположены на скрещивающихся прямых ℓ и ℓ' соответственно. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не изменяется при скольжении ребер AB и CD вдоль прямых ℓ и ℓ' (длины ребер AB и CD не меняются!).

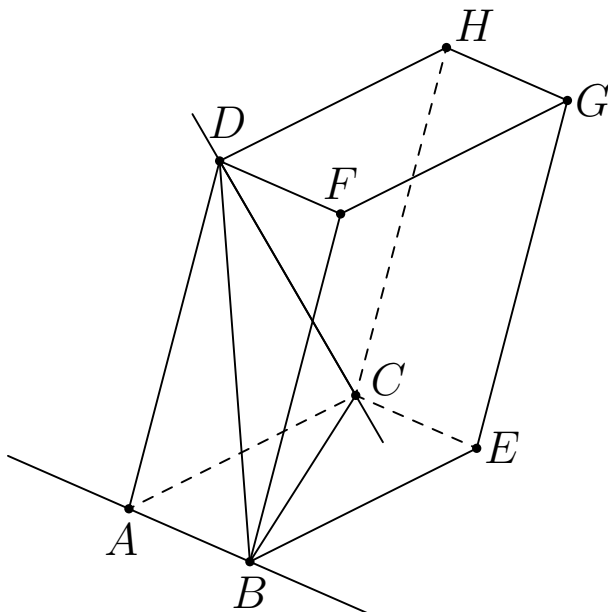


Рис. 50.

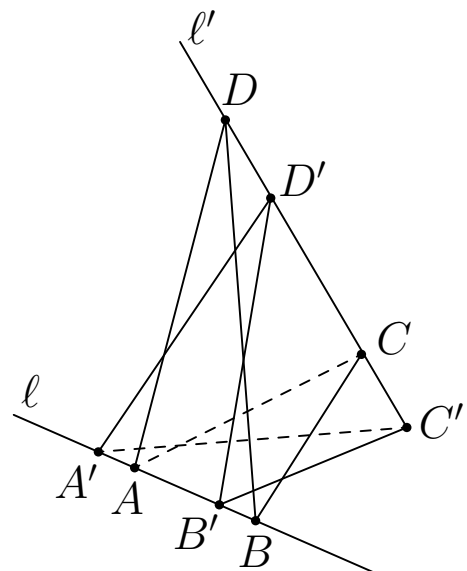


Рис. 51.

Решение. Тетраэдр $ABCD$ можно достроить до параллелепипеда P с ребрами AB , AC и AD , выходящими из вершины A

(см. рисунок 49). Объем $V(ABCD)$ тетраэдра $ABCD$ составляет одну шестую часть объема параллелепипеда P и поэтому равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} . Имеем: $V(ABCD) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})| = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})|$. Пусть $A'B'C'D'$ — другой тетраэдр, ребра $A'B'$ и $C'D'$ которого расположены на прямых ℓ и ℓ' соответственно и удовлетворяют условиям $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $V(A'B'C'D') = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D'})|$. Поскольку $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$, а $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{CD}$, то $V(A'B'C'D') = V(ABCD)$.

Рекомендуемая литература: [1], Гл. I, §6; [2], Гл. XII, [4], Гл. 5, §§3–5.

Задачи и упражнения: [2], 1342, 1343, 1346, 1347, 1348, 1361, 1362, 1365, 1366, 1374, 1375, 1376, 1382, 1404, 1430, 1433, 1435, 1437, 1440, 1441, 1443, 1444, 1445, 1447, 1448, 1450, 1451, 1452, 1454, 1455, 1456.

8 Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве.

Термин *поверхность* в разных разделах математики может иметь различный смысл. В геометрии под поверхностью в аффинном пространстве \mathcal{A}_3 обычно понимается множество Φ точек этого пространства, которое локально (то есть в некоторой окрестности каждой из своих точек) может быть представлено как образ $f(U)$ некоторой области (открытого подмножества) $U \subset \mathbf{R}^2$ при непрерывном отображении

$$f : U \ni (u^1, u^2) \mapsto f(u^1, u^2) \in \mathcal{A}_3. \quad (116)$$

Выбрав репер $\{O; \mathbf{e}_i\}$ в пространстве \mathcal{A}_3 , отображение (116) можно задать уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(u^1, u^2) \iff x^i = f^i(u^1, u^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (117)$$

Если функции (117) являются дифференцируемыми, то отображение (116) называется *дифференцируемым*. Предполагается, что отображение (116), задающее поверхность, является дифференцируемым. Кроме того, предполагается, что векторы

$$\mathbf{f}_1(u^1, u^2) = \frac{\partial \mathbf{f}(u^1, u^2)}{\partial u^1}, \quad \mathbf{f}_2(u^1, u^2) = \frac{\partial \mathbf{f}(u^1, u^2)}{\partial u^2} \quad (118)$$

с координатами $\left\{ \frac{\partial f^1}{\partial u^a}, \frac{\partial f^2}{\partial u^a}, \frac{\partial f^3}{\partial u^a} \right\}$, $a = 1, 2$, линейно независимы при всех значениях параметров u^1 и u^2 из области U . Условие линейной независимости векторов $\mathbf{f}_a(u_0^1, u_0^2)$, $a = 1, 2$, обеспечивает «двумерность» множества Φ в окрестности точки $M_0 \in \Phi$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{f}(u_0^1, u_0^2)$. При отображении (116) прямые ℓ_1 и ℓ_2 плоскости \mathbf{R}^2 с уравнениями $u^2 = u_0^2$ и $u^1 = u_0^1$ соответственно (точнее, части этих прямых, лежащие в области U) переходят в кривые γ_1 и γ_2 , лежащие на поверхности Φ и проходящие через точку M_0 . Кривые γ_1 и γ_2 имеют уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, u_0^2)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{h}(t) = \mathbf{f}(u_0^1, t)$ соответственно, где t — вещественный параметр. Касательные векторы этих кривых в точке M_0 совпадают с векторами $\mathbf{f}_1(u_0^1, u_0^2)$ и $\mathbf{f}_2(u_0^1, u_0^2)$ соответственно:

$$\left. \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right|_{t=u_0^1} = \mathbf{f}_1(u_0^1, u_0^2), \quad \left. \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right|_{t=u_0^2} = \mathbf{f}_2(u_0^1, u_0^2).$$

Линейная независимость векторов (118) при $u^1 = u_0^1$, $u^2 = u_0^2$ означает, что линейно независимы касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2 в точке M_0 , то есть кривые γ_1 и γ_2 имеют разные направления в точке M_0 .

Плоскость $\pi_{M_0}(\Phi)$, проходящая через точку M_0 в направлении подпространства $\mathcal{L}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} \subset \mathbf{V}_3$, где $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(u_0^1, u_0^2)$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2(u_0^1, u_0^2)$, называется касательной плоскостью поверхности Φ в точке M_0 . Параметрическое уравнение касательной плоскости к Φ в точке M_0 имеет следующий вид: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1 \mathbf{f}_1 + t^2 \mathbf{f}_2$. Если $u^1 = u^1(t)$ и $u^2 = u^2(t)$ — дифференцируемые функции такие, что $u^1(t_0) = u_0^1$, $u^2(t_0) = u_0^2$, то уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(u^1(t), u^2(t))$ задает (кривую) линию γ , лежащую на поверхности Φ и проходящую при $t = t_0$ через точку M_0 . Из правила дифференцирования сложных функций следует, что касательный вектор $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$ линии γ имеет вид $\mathbf{v} = \mathbf{f}_1 \frac{du_1}{dt}(t_0) + \mathbf{f}_2 \frac{du_2}{dt}(t_0)$ и принадлежит подпространству $\mathcal{L}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Таким образом, касательная плоскость к поверхности Φ в точке M_0 может быть определена как плоскость, проходящая через точку M_0 и содержащая касательные векторы в точке M_0 всех линий, лежащих на поверхности Φ и проходящих через эту точку. Это определение уже не зависит от способа, каким задана поверхность $\Phi \subset \mathcal{A}_3$.

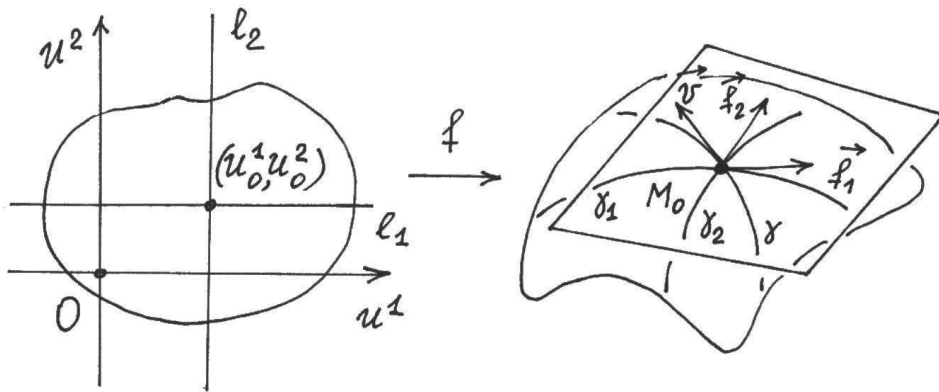


Рис. 52.

Если условие линейной независимости векторов (118) для отображения (116) не выполнено, то образ $f(U)$ может вырождаться. Например, образ отображения f , заданного уравнениями $x^1 = u^1 + u^2$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, является прямой линией в \mathcal{A}_3 .

Уравнения (117) называются *параметрическими уравнениями* поверхности. В качестве параметров u^1 и u^2 могут выступать две из трех координат x^1 , x^2 , x^3 . В этом случае поверхность представляется (локально) в виде графика некоторой функции, например,

$$x^3 = f(x^1, x^2). \quad (119)$$

Уравнение (119) эквивалентно параметрическим уравнениям

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = f(u^1, u^2).$$

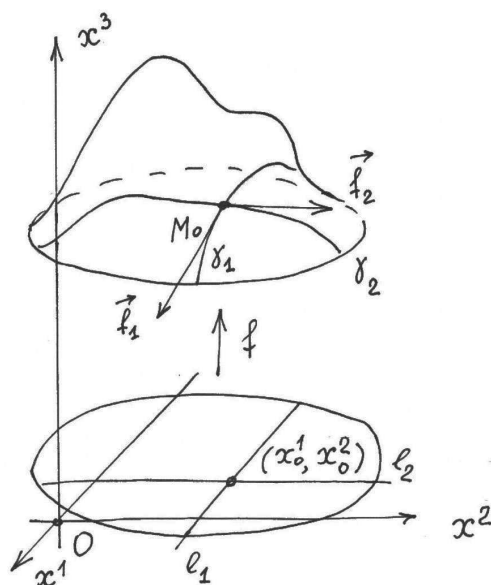


Рис. 53.

При рассмотрении поверхностей допускается, что они могут иметь *особые точки*, в окрестности которых задание поверхности параметрическими уравнениями не возможно. При этом строение поверхности в окрестности особой точки представляет собой отдельный предмет изучения.

Поверхность в пространстве \mathcal{A}_3 может быть задана уравнением вида

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0, \quad (120)$$

где $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция. Такое уравнение называется *неявным уравнением* поверхности. Разрешая

неявное уравнение (120) в окрестности некоторой точки поверхности относительно одной из координат, можно получить уравнение вида (119).

Например, в прямоугольной системе координат в евклидовом пространстве \mathcal{E}_3 уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

задает сферу радиуса a с центром в начале координат. Локально эту поверхность можно задать одним из следующих уравнений

$$\begin{aligned} z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad y = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}, \\ x = \pm \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}. \end{aligned}$$

Пусть M_0 — неособая точка, принадлежащая поверхности Φ , заданной неявным уравнением (120), а $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($x^i = x^i(t)$, $i = 1, 2, 3$) — уравнение линии γ , расположенной на поверхности Φ и проходящей при $t = t_0$ через точку M_0 . Поскольку все точки линии γ лежат на поверхности Φ , то их координаты $x^i = x^i(t)$ удовлетворяют уравнению (120), т. е.

$$F(x^1(t), x^2(t), x^3(t)) = 0. \quad (121)$$

Предполагая, что функция F и функции $x^i = x^i(t)$, $i = 1, 2, 3$, задающие линию γ , являются дифференцируемыми, продифференцируем левую и правую части уравнения (121) по переменной t . Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и используя обозначения $F_i = \partial F / \partial x^i$, $i = 1, 2, 3$, для частных производных функции F , получаем

$$F_1 \frac{dx^1}{dt} + F_2 \frac{dx^2}{dt} + F_3 \frac{dx^3}{dt} = 0. \quad (122)$$

Из уравнения (122) следует, что касательный вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$ линии γ в точке $M_0 \in \Phi$ принадлежит ядру $\ker(\nabla F(M_0))$ линейной

формы $\nabla F(M_0)$ с координатами $\{F_1(x_0^k), F_2(x_0^k), F_3(x_0^k)\}$. Отсюда следует, что в случае, когда линейная форма $\nabla F(M_0)$ является ненулевой, касательная плоскость $\pi_{M_0}(\Phi)$ поверхности Φ в точке M_0 может быть задана следующим уравнением:

$$F_1(x_0^k)(x^1 - x_0^1) + F_2(x_0^k)(x^2 - x_0^2) + F_3(x_0^k)(x^3 - x_0^3) = 0. \quad (123)$$

Поверхности можно получать движением кривых в пространстве (говорят, что кривая, перемещаясь в пространстве, «описывает» или «заметает» поверхность), а также с помощью преобразований из других поверхностей. В аналитической геометрии основное внимание уделяется изучению поверхностей, задаваемых уравнениями вида (120), в которых $F(x^1, x^2, x^3)$ является многочленом второй степени переменных x^1, x^2 и x^3 :

$$\begin{aligned} a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + \\ + 2a_{23}x^2x^3 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0. \end{aligned} \quad (124)$$

Такие поверхности называются *поверхностями второго порядка*. Для поверхности второго порядка Φ касательную плоскость $\pi_{M_0}(\Phi)$ можно определить, не прибегая к использованию средств математического анализа. Пусть ℓ : $x^i = x_0^i + v^i t$, $i = 1, 2, 3$, — прямая с направляющим вектором \mathbf{v} , проходящая через точку M_0 поверхности Φ , заданной уравнением (124). Для нахождения общих точек прямой ℓ и поверхности Φ подставим уравнения прямой в уравнение (124). Легко убедиться, что получается уравнение второй степени относительно параметра t , имеющее следующий вид (коэффициент при t^2 зависит только от координат вектора \mathbf{v} , а свободный член равен нулю, поскольку точка M_0 лежит на поверхности Φ):

$$\varphi(\mathbf{v})t^2 + (F_1(x_0^k)v^1 + F_2(x_0^k)v^2 + F_3(x_0^k)v^3)t = 0. \quad (125)$$

Точка $M_0(x_0^i)$ называется *двойной* точкой пересечения ℓ и Φ , если уравнение (125) имеет два совпадающих корня $t_1 = t_2 = 0$. Если

$\varphi(\mathbf{v}) \neq 0$, то для того, чтобы точка M_0 была двойной точкой пересечения прямой ℓ и поверхности Φ , необходимо и достаточно, чтобы

$$F_1(x_0^k)v^1 + F_2(x_0^k)v^2 + F_3(x_0^k)v^3 = 0, \quad (126)$$

т. е. чтобы направляющий вектор \mathbf{v} прямой ℓ принадлежал вышеуказанному ядру $\ker(\nabla F(M_0))$ линейной формы $\nabla F(M_0)$. Если $\varphi(\mathbf{v}) = 0$ и выполняется условие (126), то прямая ℓ целиком лежит на поверхности Φ . Поэтому можно определить *касательную плоскость к поверхности второго порядка Φ в точке M_0* как плоскость, содержащую все прямые ℓ , для которых точка M_0 является двойной точкой пересечения ℓ и Φ . При таком определении снова получим плоскость с уравнением (123).

Ниже рассматриваются некоторые важные типы поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве \mathcal{E}_3 .

8.1 Поверхности переноса.

Поверхностью переноса в \mathcal{E}_3 называется поверхность, образующаяся в результате параллельного переноса некоторой кривой, при котором фиксированная точка этой кривой движется вдоль некоторой другой кривой.

Пусть задана кривая α с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{a}(t)$, где t — вещественный параметр, пробегающий некоторую область изменения. В результате параллельного переноса кривой α на вектор $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$ получается кривая α_0 с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}_0$, конгруэнтная кривой α . Если вектор \mathbf{b} , на который переносится кривая α , является переменным, т. е. $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$, где s — вещественный параметр, также пробегающий некоторую область изменения, то в результате параллельного перенесения кривой α получается поверхность Φ , уравнения которой (после переобозначения

параметров $t = u^1, s = u^2$) имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(u^1) + \mathbf{b}(u^2). \quad (127)$$

Фиксированная точка M_0 кривой α с радиус-вектором $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(t_0)$ при параллельном переносе на вектор $\mathbf{b}(s)$ описывает кривую β_0 с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}(s)$. Таким образом поверхность с уравнением (127) может быть также получена параллельным переносом на вектор $\mathbf{a}(t)$ кривой β , заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{b}(s)$. Всякая кривая α_s , получающаяся параллельным переносом кривой α на вектор $\mathbf{b}(s)$, называется образующей поверхности переноса (127). Кривая β_0 называется направляющей поверхности переноса (127).

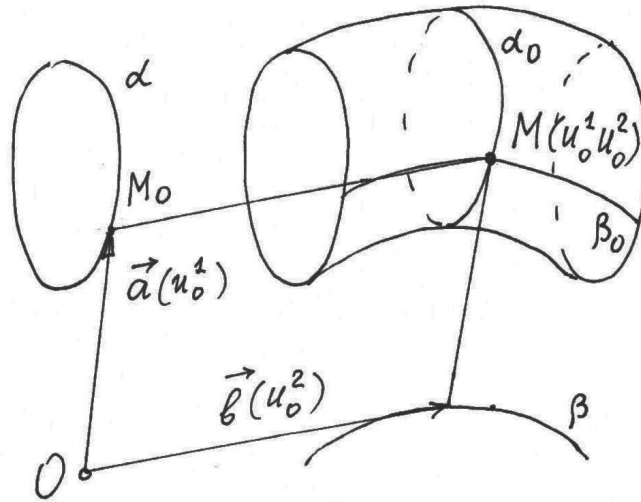


Рис. 54.

Параболоиды.

Пусть α — парабола с уравнением $y^2 = 2qz$, расположенная в плоскости Oyz , а β — парабола с уравнением $x^2 = 2pz$, расположенная в плоскости Oxz (параметры p и q в уравнениях парабол — положительные числа). В результате параллельного переноса первой параболы вдоль второй получается поверхность, называемая *эллиптическим параболоидом*. Если же вдоль параболы β с уравнением $x^2 = 2pz$, расположенной в плоскости Oxz , пере-

носить параллельно параболу α с уравнением $y^2 = -2qz$, расположенную в плоскости Oyz (параметры p и q — положительные числа), то в результате получится поверхность, называемая *гиперболическим параболоидом*. Эти параболоиды изображены на рисунке 55 (слева — эллиптический, справа — гиперболический).

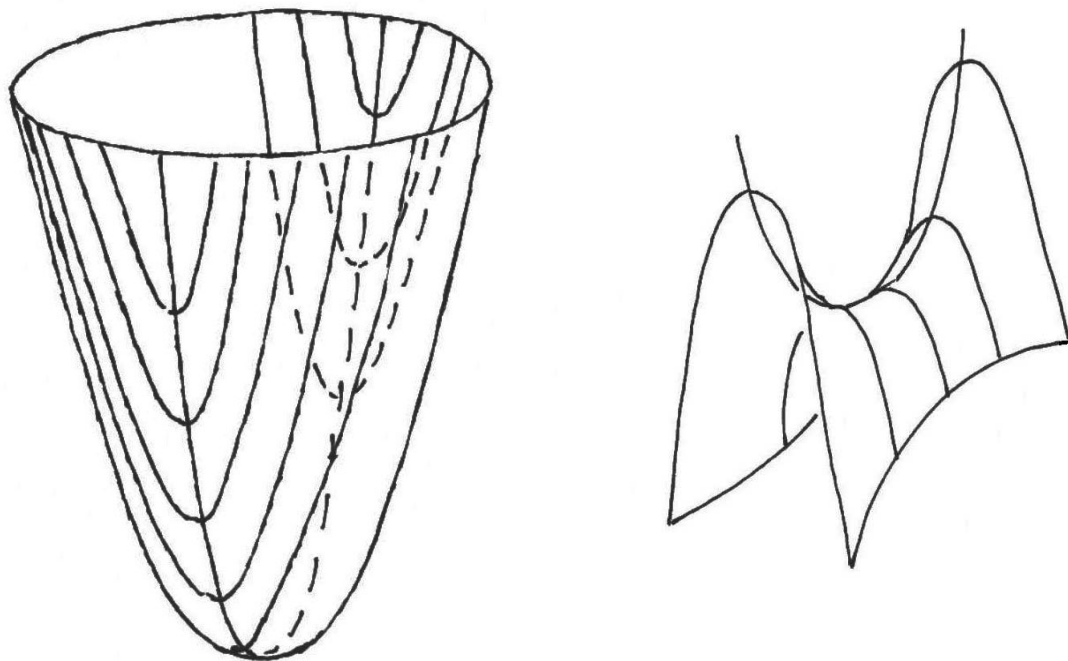


Рис. 55.

Для вывода уравнений эллиптического и гиперболического параболоидов воспользуемся следующими параметрическими уравнениями парабол α и β :

$$\alpha : \quad x = 0, \quad y = u^2, \quad z = \pm(u^2)^2/2p; \quad (128)$$

$$\beta : \quad x = u^1, \quad y = 0, \quad z = (u^1)^2/2p. \quad (129)$$

Знак «+» в уравнениях (128) соответствует случаю эллиптического параболоида, а знак «−» соответствует случаю гиперболического параболоида. Подставляя уравнения (128) и (129) в уравнение (127) и осуществляя замену параметров $u^1 = x$, $u^2 = y$, получим следующие уравнения эллиптического и гипер-

болического параболоидов соответственно:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (130)$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (131)$$

Уравнения (130) и (131) называются *каноническими уравнениями* эллиптического и гиперболического параболоидов.

Если пересечь эллиптический параболоид (130) плоскостью $z = c$ ($c > 0$), то в сечении получится эллипс, определяемый уравнениями

$$\frac{x^2}{2pc} + \frac{y^2}{2qc} = 1, \quad z = c.$$

Пересечения гиперболического параболоида (131) с плоскостями $z = c$ и $z = -c$ ($c > 0$) представляют собой гиперболы, определяемые соответственно системами уравнений

$$\frac{x^2}{2pc} - \frac{y^2}{2qc} = 1, \quad z = c \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{2pc} - \frac{x^2}{2qc} = 1, \quad z = -c.$$

Пересечение гиперболического параболоида (131) с координатной плоскостью Oxy ($z = 0$) представляет собой пару пересекающихся прямых, расположенных в плоскости Oxy и имеющих уравнения

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Выведем уравнение касательной плоскости эллиптического параболоида (130) в точке M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) . Для этого представим уравнение (130) в следующем виде: $x^2/2p + y^2/2q - z = 0$. Уравнение (123) в этом случае принимает вид

$$\frac{x_0}{p}(x - x_0) + \frac{y_0}{q}(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (132)$$

Раскрывая скобки в уравнении (132) и учитывая, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит параболоиду, т.е. $-x_0^2/p - y_0^2/q + z_0 = -z_0$, получим следующее уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду (130) в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) :

$$\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} = z + z_0. \quad (133)$$

Уравнение касательной плоскости к гиперболическому параболоиду (131) в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) выводится аналогично. Это уравнение имеет вид

$$\frac{x_0 x}{p} - \frac{y_0 y}{q} = z + z_0. \quad (134)$$

Плоскость Oxy ($z = 0$), пересекающая гиперболический параболоид (131) по паре пересекающихся прямых, является касательной плоскостью к этому параболоиду в начале координат $O(0, 0, 0)$.

Цилиндрические поверхности.

В том случае, когда параллельно переносимая кривая α является прямой линией, соответствующая поверхность переноса Φ называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром* с направляющей кривой β_0 и прямолинейной образующей, параллельной прямой α . Пусть прямая α имеет уравнение $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$. Подставляя в (127) $\mathbf{a}(u^1) = u^1\mathbf{a}$, получим уравнения цилиндрической поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}(u^2) + u^1\mathbf{a}. \quad (135)$$

Направляющей цилиндрической поверхности (135) является кривая $\beta = \beta_0$ с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{b}(u^2)$.

В качестве направляющей цилиндрической поверхности можно взять линию пересечения этой поверхности с плоскостью, перпендикулярной прямой α . В этом случае прямоугольную систему координат $Oxyz$ можно выбрать таким образом, чтобы

направляющая кривая β лежала в плоскости Oxy , а прямая α совпадала с осью Oz . Если при этом направляющая задана в плоскости Oxy уравнением $F(x, y) = 0$ (и системой уравнений $F(x, y) = 0, z = 0$ в пространстве \mathcal{E}_3), то цилиндрическая поверхность имеет уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (136)$$

Следует иметь в виду, что функция $F(x, y)$ в уравнении цилиндрической поверхности (136) является функцией трех переменных x, y, z , но значение этой функции зависит только от значений переменных x и y (т. е. $F(x, y, z_1) = F(x, y, z_2)$ при любых z_1 и z_2).

Выбирая в качестве направляющей поверхности (136) эллипс, гиперболу или параболу, получим цилиндрические поверхности, называемые соответственно *эллиптическим*, *гиперболическим* и *параболическим цилиндрами*. Если направляющие эллипс, гипербола и парабола в плоскости Oxy заданы каноническими уравнениями, то соответствующие эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры имеют следующие уравнения (называемые *каноническими*):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad y^2 = 2px. \quad (137)$$

Указанные поверхности изображены на рисунке.

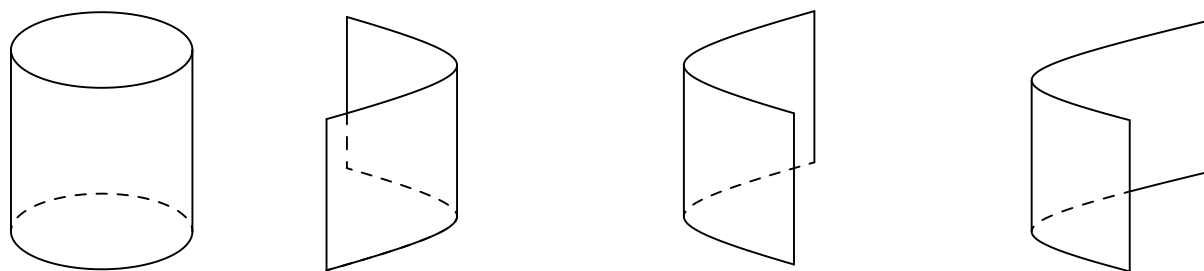


Рис. 56.

Уравнения касательных плоскостей к цилиндрам (137) выводятся аналогично рассмотренному выше случаю эллиптического параболоида. Эти уравнения имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1, \quad \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad y_0y = p(x + x_0). \quad (138)$$

Поскольку переменная z не входит в явном виде в уравнения (138), то касательные плоскости к цилиндрам (137) содержат целиком прямолинейные образующие, проходящие через точки касания.

8.2 Поверхности вращения.

Поверхностью вращения в пространстве \mathcal{E}_3 называется поверхность, описываемая линией α , расположенной в плоскости π , при вращении плоскости π вокруг прямой линии ℓ , принадлежащей этой плоскости.

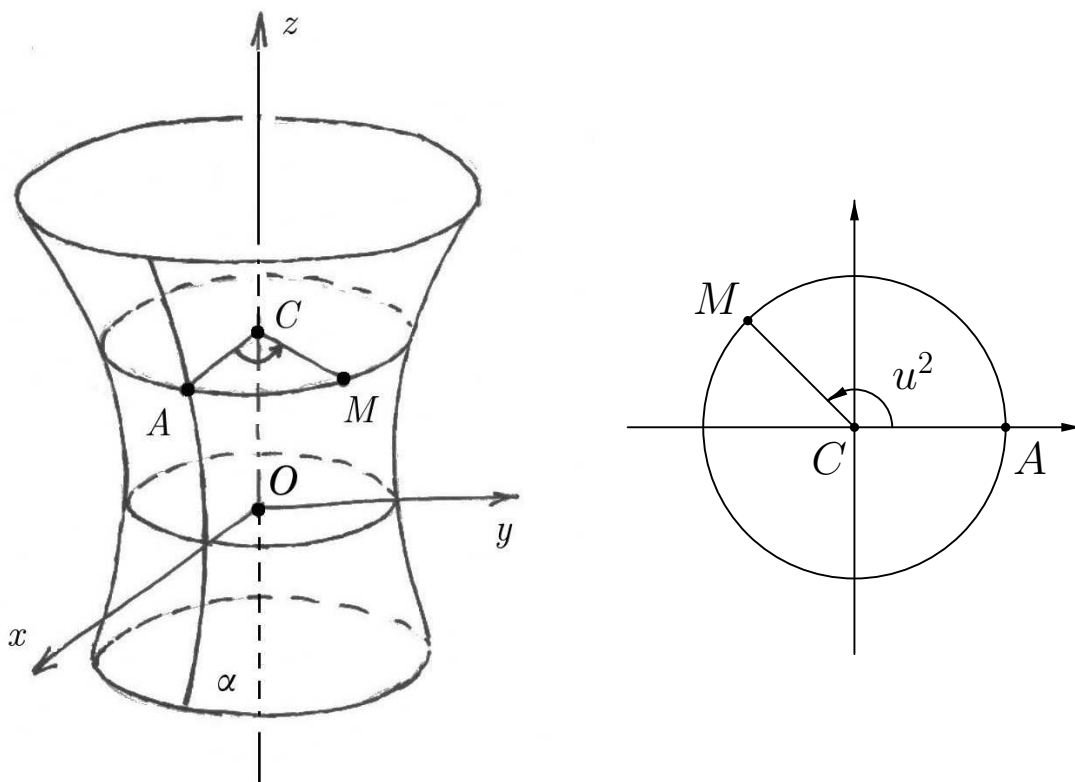


Рис. 57.

Прямая ℓ называется *осью* поверхности вращения. При вращении линии α вокруг оси ℓ каждая точка A этой линии описывает окружность $\omega = \omega(A)$ с центром $C = C(A) \in \ell$, расположенную в плоскости $\sigma = \sigma(A)$, перпендикулярной оси ℓ . Окружности $\omega(A)$, $A \in \alpha$, называются *параллелями* поверхности вращения, а линии $\alpha(u^2)$, получающиеся поворотом кривой α на угол u^2 , называются *меридианами* поверхности вращения.

Для составления уравнений поверхности вращения выберем систему координат $Oxyz$ в пространстве \mathcal{E}_3 , определяемую правым ортонормированным репером $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, в которой прямая ℓ совпадает с осью Oz , а плоскость π совпадает с плоскостью Oxz . Пусть кривая α задана параметрическими уравнениями

$$x = f(u^1), \quad y = 0, \quad z = g(u^1) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} = f(u^1)\mathbf{i} + g(u^1)\mathbf{k}.$$

Произвольная точка M поверхности вращения получается из некоторой точки A линии α поворотом на угол u^2 вокруг точки $C = C(A)$. Поскольку $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$, $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OC} = g(u^1)\mathbf{k}$, а вектор \overrightarrow{CM} получается из вектора $\overrightarrow{CA} = f(u^1)\mathbf{i}$ поворотом на угол u^2 в ориентированной евклидовой векторной плоскости $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ и, следовательно, имеет вид $\overrightarrow{CM} = f(u^1) \cos(u^2)\mathbf{i} + f(u^1) \sin(u^2)\mathbf{j}$, то

$$\mathbf{r}_M = f(u^1) \cos(u^2)\mathbf{i} + f(u^1) \sin(u^2)\mathbf{j} + g(u^1)\mathbf{k}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая поверхность вращения имеет следующие параметрические уравнения:

$$x = f(u^1) \cos(u^2), \quad y = f(u^1) \sin(u^2), \quad z = g(u^1).$$

Если линия α в плоскости Oxz задана неявным уравнением $F(x, z) = 0$ и $A(x_A, 0, z_A)$ — некоторая точка линии α , то точка $M(x_M, y_M, z_M)$ принадлежит окружности $\omega(A)$ тогда и только

тогда, когда $z_M = z_A$ и $x_M^2 + y_M^2 = x_A^2$ ($|x_A|$ — радиус окружности $\omega(A)$). Поэтому точка M принадлежит поверхности вращения тогда и только тогда, когда одна (или каждая) из точек с координатами $\left(\pm\sqrt{x_M^2 + y_M^2}, 0, z_M\right)$ лежит на линии α , то есть удовлетворяет уравнению $F(x, z) = 0$. Отсюда следует, что поверхность, получающаяся в результате вращения линии α вокруг оси Oxz имеет следующее уравнение:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \quad (139)$$

Эллипсоиды и гиперболоиды.

Эллипсоиды и гиперболоиды вращения возникают при вращении эллипсов и гипербол вокруг их осей симметрии. При вращении вокруг оси Oz эллипса, расположенного в плоскости Oxz и заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

получается поверхность второго порядка, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (140)$$

Поверхность, заданная уравнением (140), называется *эллипсоидом вращения*.

Применяя к поверхности (140) преобразование

$$M(x, y, z) \longmapsto M(x', y', z'), \quad x' = x, \quad y' = \frac{b}{a}y, \quad z' = z, \quad (141)$$

представляющее собой *растяжение* от плоскости Oxz при $b > a$ и *сжатие* к плоскости Oxz при $b < a$, получим поверхность, имеющую уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (142)$$

Эта поверхность называется *эллипсоидом* (общего вида). Если в уравнении эллипсоида (142) никакие два из параметров a , b и c (называемых *полуосями* эллипсоида) не совпадают между собой, эллипсоид называют *трехосным*. При $a = b = c$ эллипсоид представляет собой сферу радиуса a .

Уравнение *касательной плоскости к эллипсоиду* с уравнением (142) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ выводится аналогично рассмотренному выше случаю эллиптического параболоида (см. с. 99). Это уравнение имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1. \quad (143)$$

При вращении вокруг оси Oz гипербола, расположенных в плоскости Oxz и заданных уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

получаются поверхности второго порядка, определяемые соответственно уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (144)$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (145)$$

Первая из этих поверхностей называется *однополостным гиперболоидом вращения*, а вторая *двуполостным гиперболоидом вращения*. Применяя к поверхностям, имеющим уравнения (144) и (145), преобразование (141), получим поверхности, определяемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (146)$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (147)$$

Поверхность с уравнением (146) называется *однополостным гиперболоидом* (общего вида), а поверхность с уравнением (147), соответственно, *двуполостным гиперболоидом* (общего вида). На рисунке 58 изображены соответственно, эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид.

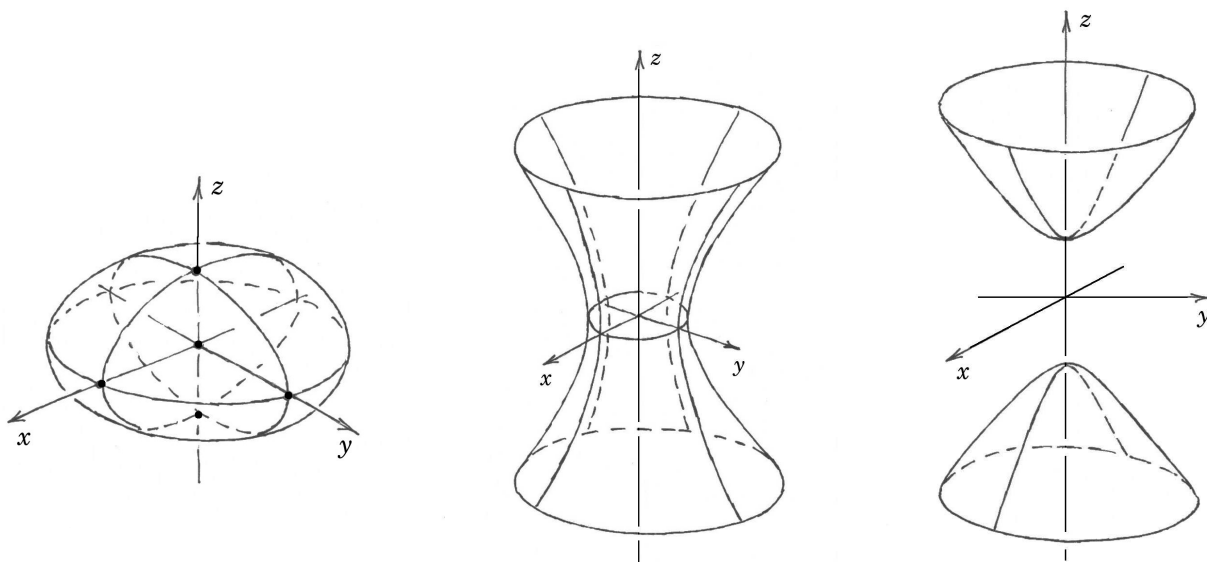


Рис. 58.

Уравнение *касательной плоскости* к *однополостному гиперболоиду* (146) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 1, \quad (148)$$

а уравнение *касательной плоскости* к *двуполостному гиперболоиду* (147) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = -1. \quad (149)$$

Задача 26. Выяснить, что представляют собой пересечения эллипсоида и гиперболоидов, заданных уравнениями (142), (146) и (147), с плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Показать, в частности, что плоскости $x = a$ и $y = b$ являются касательными к однополостному гиперболоиду (146) и пересекают его по паре прямых, пересекающихся в точке касания.

При вращении вокруг оси Oz параболы, расположенной в плоскости Oxz и заданной уравнением

$$x^2 = 2pz,$$

получается поверхность с уравнением

$$x^2 + y^2 = 2pz. \quad (150)$$

Эта поверхность представляет собой частный случай рассмотренного выше эллиптического параболоида и называется *параболоидом вращения*.

Эллиптический параболоид общего вида, заданный уравнением (130), получается из параболоида вращения (150) преобразованием

$$M(x, y, z) \longmapsto M(x', y', z'), \quad x' = x, \quad y' = \sqrt{\frac{q}{p}} y, \quad z' = z,$$

аналогичным преобразованию (141).

При вращении вокруг оси Oz прямой $x - a = 0$ получается *круговой цилиндр*, имеющий уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Преобразование (141) переводит этот круговой цилиндр в эллиптический цилиндр с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Конусы второго порядка.

При вращении вокруг оси Oz прямых $cx - az = 0$ и $cx + az = 0$ получается поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (151)$$

называемая *конусом вращения*. Преобразование (141) переводит конус вращения в поверхность, имеющую уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (152)$$

и называемую *конусом второго порядка* общего вида.

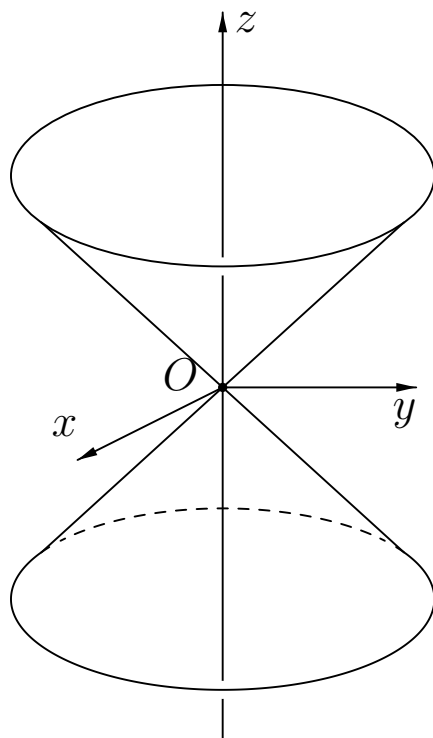


Рис. 59.

Начало координат O называется *вершиной* конуса (152). Вершина конуса является его особой точкой (см. рисунок 59).

Прямые $cx \pm az = 0$ являются асимптотами сопряженных гипербол

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (153)$$

Конус с уравнением (151), получающийся при вращении вокруг оси Oz прямых, имеющих уравнения $cx \pm az = 0$, не имеет общих точек с однополостным и двуполостным гиперболоидами с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

которые возникают при вращении вокруг оси Oz гипербол (153), и называется *асимптотическим конусом* этих гиперboloидов. Конус второго порядка (152), получающийся из конуса вращения (151) при преобразовании (141), называется *асимптотическим конусом* гиперboloидов, заданных уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

(см. рисунок 60).

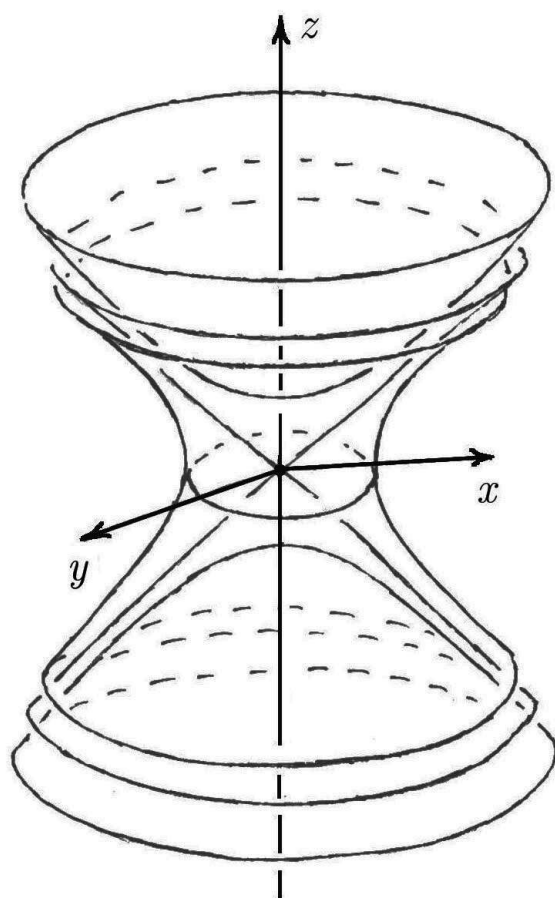


Рис. 60.

8.3 Линейчатые поверхности.

Линейчатой поверхностью называется поверхность, описываемая прямой линией при ее движении в пространстве. В соответствии с определением, линейчатая поверхность представляет

собой семейство прямых и поэтому может быть задана уравнением вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}(u^1) + u^2 \mathbf{a}(u^1), \quad (154)$$

где u^1 — параметр, определяющий прямую семейства, а $u^2 = t$ — параметр, определяющий точку на фиксированной прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}(u_0^1) + t \mathbf{a}(u_0^1), \quad u^1 = u_0^1 = \text{const}, \quad (155)$$

этого семейства. Векторные функции $\mathbf{b}(u^1)$ и $\mathbf{a}(u^1)$ вещественного параметра u^1 , входящие в уравнение (154), предполагаются дифференцируемыми. Прямые (155), из которых состоит линейчатая поверхность (154), называются ее *прямолинейными образующими*. Линия β , пересекающая все прямолинейные образующие, называется *направляющей* линейчатой поверхности. В качестве направляющей линейчатой поверхности, заданной уравнением (154), можно взять линию с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{b}(u^1)$.

К классу линейчатых поверхностей относятся рассмотренные выше цилиндрические поверхности и конусы второго порядка.

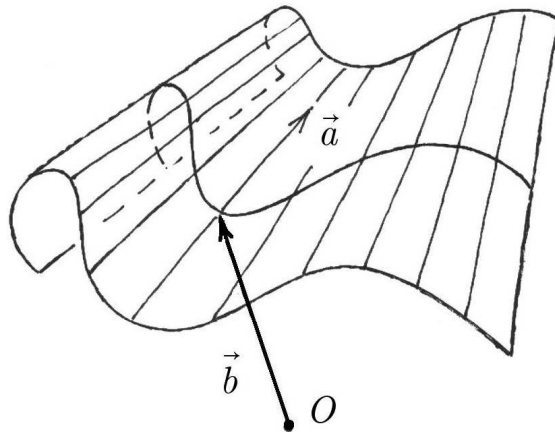


Рис. 61.

Конические поверхности.

Конической поверхностью общего вида называется линейчатая поверхность, описываемая прямой, которая в каждом своем положении при движении в пространстве проходит через фикси-

рованную точку S и пересекает фиксированную линию β . Точка S называется *вершиной* а линия β *направляющей* конической поверхности.

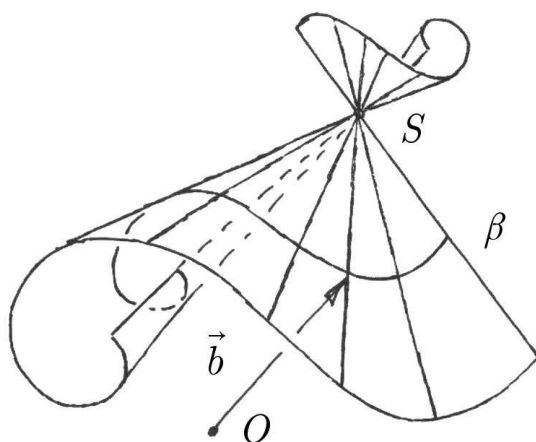


Рис. 62.

Если вершина S имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_0$, а направляющая линия β задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{b}(u^1)$, то коническая поверхность определяется уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u^2(\mathbf{b}(u^1) - \mathbf{r}_0).$$

Вершина S является особой точкой конической поверхности.

Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида и гиперболического параболоида.

Среди рассмотренных выше поверхностей второго порядка линейчатыми поверхностями являются однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Более того, каждая из этих поверхностей несет на себе два различных семейства прямолинейных образующих. Уравнения этих семейств не трудно вывести из неявных уравнений однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Рассмотрим следующие преобразования уравнения однополост-

ного гиперболоида:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 & \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (156)$$

Из уравнения (156) однополостного гиперболоида следует, что при любых вещественных числах λ и μ , не равных нулю одновременно, каждая из систем уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} & \quad (a) \\ \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} & \quad (b) \end{aligned} \quad (157)$$

задает прямую линию, целиком расположенную на однополостном гиперболоиде. Действительно, уравнение (156) является следствием каждой из систем (157).

Параметры λ и μ в уравнениях семейств (157) существенны с точностью до умножения на вещественное число. Для представления уравнения однополостного гиперболоида в виде (154) можно поступить следующим образом: положить в одной из систем уравнений (157), например в системе (157 а), $\lambda = 1$, $\mu = u^1$ и, считая u^1 фиксированным, перейти к параметрическим уравнениям прямой (см. с. 62), заданной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = u^1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ u^1 \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

используя $t = u^2$ для обозначения параметра вдоль прямой. Однако надо иметь в виду, что, полагая $\lambda = 1$, мы исключаем из

рассмотрения прямолинейную образующую, соответствующую значению $\lambda = 0$. Чтобы избежать этой потери, можно положить $\lambda = \cos u^1$, $\mu = \sin u^1$, но при этом параметр u^1 будет существенным с точностью до слагаемого кратного 2π . Если требуется найти прямолинейные образующие, проходящие через данную точку M_0 однополостного гиперболоида, нужно в каждую из систем уравнений (157) подставить координаты точки M_0 и из получающихся при этом систем уравнений найти значения параметров λ и μ , соответствующие искомым прямолинейным образующим. Найденные значения λ и μ следует затем подставить в исходные системы уравнений (157). В результате искомые образующие оказываются заданными системами линейных уравнений. Решая указанные системы линейных уравнений (см. с. 62), можно найти канонические уравнения прямолинейных образующих.

Уравнение гиперболического параболоида можно преобразовать аналогичным образом:

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \iff z \cdot 2 = \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right), \quad (158)$$

откуда следует, что при любом вещественном λ каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} z = \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \\ 2\lambda = \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \end{cases} \quad (a) \quad (159)$$

$$\begin{cases} z = \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \\ 2\lambda = \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \end{cases} \quad (b)$$

задает прямую линию, целиком расположенную на гиперболи-

ческом параболоиде.

Для представления уравнения гиперболического параболоида в виде (154) можно положить в одной из систем уравнений (159) $\lambda = u^1$ и, считая u^1 фиксированным, перейти к параметрическим уравнениям прямой (см. с. 62), заданной полученной системой линейных уравнений, используя $t = u^2$ для обозначения параметра вдоль прямой. Для нахождения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку M_0 гиперболического параболоида, следует в каждую из систем уравнений (159) подставить координаты этой точки, найти значения параметра λ из получающихся систем уравнений, подставить найденные значения в исходные системы (159) и затем найти канонические уравнения искомых прямых. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида изображены на рисунке 63.

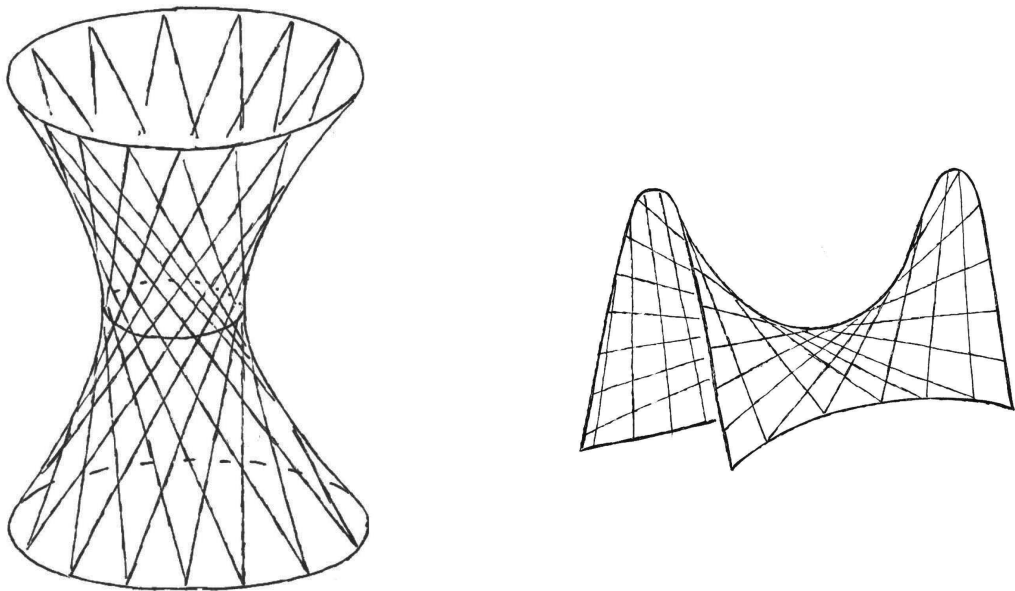


Рис. 63.

Задача 27. Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1,$$

проходящие через точку $M_0(6, 2, 8)$.

Решение. Система уравнений (157 а) в данном случае имеет вид

$$\lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{z}{4} \right) = \mu \left(1 + \frac{y}{2} \right), \quad \mu \left(\frac{x}{3} - \frac{z}{4} \right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{2} \right). \quad (160)$$

Подставляя $x = 6$, $y = 2$, $z = 8$ в (160), получим систему уравнений $4\lambda = 2\mu$, $0\mu = 0\lambda$, откуда находим $\lambda = 1$, $\mu = 2$ (параметры λ и μ существенны с точностью до умножения на не равное нулю число!). Подставляя $\lambda = 1$, $\mu = 2$ в (160), получим систему уравнений

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{z}{4} \right) = 2 \left(1 + \frac{y}{2} \right), \quad 2 \left(\frac{x}{3} - \frac{z}{4} \right) = \left(1 - \frac{y}{2} \right). \quad (161)$$

Система уравнений (161) имеет частное решение $x_0 = 6$, $y_0 = 2$, $z_0 = 8$ (это координаты рассматриваемой точки поверхности). Система однородных уравнений, соответствующая системе неоднородных уравнений (161), имеет (фундаментальное) решение $x = 3$, $y = 0$, $z = 4$. Эти три числа 3, 0 и 4 являются координатами направляющего вектора первой прямолинейной образующей. Таким образом, первая прямолинейная образующая, проходящая через точку M_0 , имеет уравнения $x = 6 + 3t$, $y = 2$, $z = 8 + 4t$. Аналогично находятся уравнения второй прямолинейной образующей.

Задача 28. Показать, что поверхность Φ , описываемая одной из двух скрещивающихся прямых при ее вращении вокруг другой, является однополостным гиперболоидом.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат в \mathcal{E}_3 , в которой прямая ℓ_1 , являющаяся осью вращения, совпадает с

осью Oz , а общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых совпадает с осью Oy . Тогда вторая прямая ℓ_2 лежит в плоскости $y = a$, параллельной плоскости Oxz , и поэтому может быть задана системой уравнений

$$z = kx, \quad y = a. \quad (162)$$

Произвольная точка $M(x, y, z) \in \Phi$ получается вращением вокруг оси Oz некоторой точки $A(x_A, y_A, z_A) \in \ell_2$. Координаты точек M и A связаны соотношениями

$$z_A = z, \quad x_A^2 + y_A^2 = x^2 + y^2. \quad (163)$$

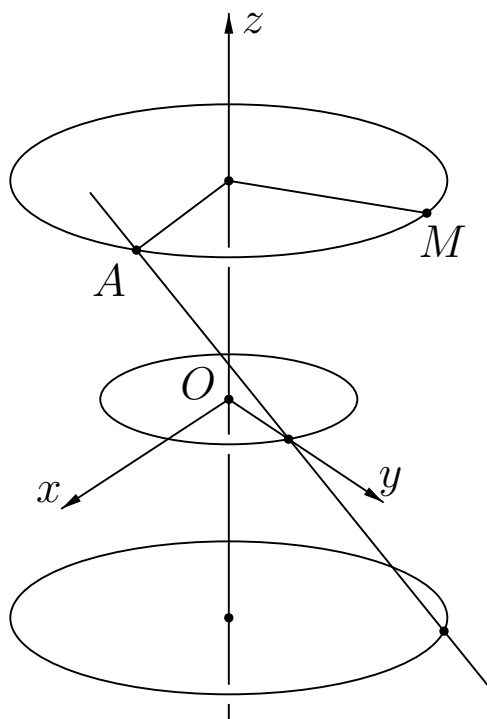


Рис. 64.

Поскольку точка A лежит на прямой ℓ_2 , то ее координаты удовлетворяют уравнениям (162): $z_A = kx_A$, $y_A = a$. Поэтому

$$x_A^2 + y_A^2 = \frac{z_A^2}{k^2} + a^2. \quad (164)$$

Подставляя в равенство (164) выражения (163) для координат точки A через координаты точки M , получим уравнения, кото-

рым удовлетворяют координаты точки M :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{где } c = ka,$$

совпадающие с каноническими уравнениями однополостного гиперболоида вращения (144).

Очевидно, этот же самый гиперболоид получится и при вращении вокруг оси Oz прямой $z = -kx$, $y = a$.

Рекомендуемая литература: [1], Гл. VII; [2], Гл. XIV.

Задачи и упражнения: [2], 1540, 1544, 1552, 1555, 1559, 1560, 1595, 1596, 1597, 1600, 1613, 1616, 1617, 1639, 1641, 1644, 1657, 1658; [13], 894, 904, 907, 909, 910, 913, 920, 922, 931, 932, 933.

Список литературы

- [1] Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М. Наука. 1979. 512 с.
- [2] Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М. Наука. 1964.
- [3] Игудесман К.Б. *Задачи по аналитической геометрии. Часть 2*. Учебное пособие к курсу «Аналитическая геометрия». Казанск. ун-т. 2008. 60 с.
- [4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. М. Наука. 1981. 232 с.
- [5] Кострикин А.И., Манин Ю.И. *Линейная алгебра и геометрия*. М. Наука. 1986. 304 с.
- [6] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. М. Наука. 1971. 432 с.
- [7] Малахальцев М.А., Фомин В.Е., Шапуков Б.Н., Шурыгин В.В. *Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии*. Учебное пособие. Изд.-во Казанск. ун-та. 1993. 160 с.
- [8] Постников М.М. *Аналитическая геометрия (Лекции по геометрии. Семестр I)*. М. Наука. 1979. 336 с.
- [9] Постников М.М. *Линейная алгебра (Лекции по геометрии. Семестр II)*. М. Наука. 1986. 400 с.
- [10] Постников М.М. *Группы и алгебры Ли (Лекции по геометрии. Семестр V)*. М. Наука. 1982. 448 с.
- [11] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре*. М. Наука. 1967. 384 с.
- [12] Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства*. М. Наука. 1966. 648 с.

- [13] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*. М. Наука. 1964. 336 с.
- [14] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия I*. Казань, КГУ, 2007. 108 с.
- [15] Шурыгин В.В. *Аналитическая геометрия. Часть 3. Многомерные пространства. Гиперповерхности второго порядка*. Учебное пособие к курсу аналитической геометрии. Казань, КГУ, 2008. 100 с. (Сайт КФУ). <http://www.kpfu.ru/f5/shurygin/geom3.pdf>.

Содержание

1. Преобразование координат в аффинном пространстве	3
2. Векторное и смешанное произведения векторов	22
3. Элементы сферической геометрии	40
4. Сопряженное векторное пространство	46
5. Плоскость и прямая в трехмерном аффинном пространстве	55
6. Пространство \mathbf{E}_n^* , сопряженное евклидову векторному пространству \mathbf{E}_n	72
7. Плоскость и прямая в трехмерном евклидовом пространстве	77
8. Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве	90
Список литературы	118